

SUITES REELLES 4^{ème} Mathématiques

Exercice 1

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

- 1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq 3$.
- 2) Montrer que la suite U est croissante.
- 3) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2}$

- 1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$.
 b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.
 c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1-U_n}{1+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$.
 b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$
 c) On pose pour tout $n \in \mathbb{N} ; P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$
 d) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right)$

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{U_n^2 - 3U_n + 6}{U_n - 1}$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 3 \leq U_n \leq 4$
 b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
 c) Montrer que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{2}(U_n - 3)$
 b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n - 3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$
- 3) On admet que $\forall n \geq 4$ on a : $2^n \geq n^2$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = n(U_n - 3)$

- a) Montrer que $\forall n \geq 4$ on a : $V_n \leq \frac{1}{n}$
- b) Déterminer alors la limite de la suite V .

Exercice 4

Soit U une suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = \frac{1}{1+U_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- 1) On considère la suite V définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{2n}$.

- a) Montrer que $V_{n+1} = \frac{2(1+V_n)}{3+V_n}$.
- b) Montrer par récurrence que $V_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- c) Montrer que V est une suite décroissante.
- d) En déduire que V est convergente et calculer sa limite.
- 3) Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.
- 4) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{-1+U_n}{2+U_n}$.
- a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique.
- b) Retrouver $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2}(1+x^2)}$

- 1) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(x)$.
- b) Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$ on a : $f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- 2) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.
- a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$
- b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_n - 1|$
- c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
- d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 6

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{2U_n}$

- 1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$
- b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{2U_n - 2}{2U_n - 1}$
- a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$
- b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n
- c) Retrouver la limite de la suite (U_n) .
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$
- b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \frac{1}{2^n}$
- c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) .

Exercice 7

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{U_n - 8}{2U_n - 9}$

- 1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$
 b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.
 c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 2) Soit la suite réelle (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{U_n - 1}{U_n - 4}$
 a) Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique.
 b) Exprimer W_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n) .
- 3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{7} |U_n - 1|$
 b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq 4 \left(\frac{1}{7}\right)^n$
 c) Retrouver la limite de la suite (U_n) .

Exercice 8

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_{n+1} = \sqrt{\frac{U_n + 1}{2}}$

- 1) Dans cette question on suppose que $U_0 = \cos x$ où $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$
 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$
 b) En déduire la limite de la suite (U_n) .
- 2) Dans cette question on suppose que $U_0 \in]0, 1[$
 a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$
 b) Montrer que la suite (U_n) est monotone.
 c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 9

- 1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \cos x$

Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- 2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + \cos(U_n) \end{cases}$
 a) Montrer pour tout entier naturel n , $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$
 b) Montrer que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.
- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n \cos(U_k)$
 a) Montrer pour tout entier naturel n , $S_n = U_{n+1}$
 b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$
- 4) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{U_k}{2}\right)$
 a) Montrer, en utilisant la formule d'Euler que $\forall \theta \in \mathbb{R} : \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1 + \cos \theta}{2}$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$

c) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} nV_n$

Exercice 10

1) Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 3$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 3}{U_n}$.

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) .

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{3}{U_n}$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$ puis Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 11

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} ; U_{n+1} = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

2) a) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (U_n)

4) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$

b) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 12

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \left(1 + \frac{1}{1 \times 1!}\right) \times \left(1 + \frac{1}{2 \times 2!}\right) \times \dots \times \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) \quad \text{et} \quad V_n = \left(1 + \frac{1}{n \times n!}\right) U_n$$

1) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} \times \left(\frac{n}{n(n+1)(n+1)!} - n^2 - 1 \right) U_n$

b) En déduire que la suite (V_n) est décroissante.

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : V_n - U_n \leq \frac{4}{n}$

4) En déduire que les (U_n) et (V_n) convergent vers un même réel L et que $\frac{5}{2} \leq L \leq \frac{25}{8}$

Exercice 13

Soit les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_0 = 0 ; V_0 = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } U_{n+1} = \frac{2U_n + V_n}{3} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{3U_n + 2V_n}{5}$$

1) Calculer U_1 et V_1

2) Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

3) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

4) Montrer que les suites (U_n) et (V_n) sont convergentes et qu'elles admettent la même limite.

5) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = 9U_n + 5V_n$

a) Montrer que (W_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n) et (V_n) .

Exercice 14

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 4$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - U_n)$.

(On pourra commencer par exprimer $4 - U_{n+1}$ en fonction de $4 - U_n$)

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $4 - U_n \leq 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n) .

3) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite (S_n) n'est pas majorée.

c) Déterminer alors la limite de la suite (S_n) .

4) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n \geq 4n - 12 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) b)

b) Retrouver alors la limite de la suite (S_n) .

Exercice 15

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_1 = 1$, $U_2 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_{n+2} = 6U_{n+1} - 8U_n$

Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

- 1) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $W_{n+1} = 6 - \frac{8}{W_n}$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $2 < W_n < 4$
c) Montrer que la suite w est croissante
d) Montrer que la suite w est convergente et déterminer sa limite.
- 2) Soit la suite réelle t définie sur $\mathbb{N}^*$ par $t_n = \frac{W_n - 4}{W_n - 2}$
a) Montrer que t est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $W_n = \frac{2(1+2^n)}{1+2^{n-1}}$
c) En déduire que $U_n = 2^{n-2}(1 + 2^{n-1})$
d) Déterminer la limite de la suite U .

Exercice 16

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \alpha U_n + (1 - \alpha)V_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = (1 - \alpha)U_n + \alpha V_n \end{cases} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{2} < \alpha < 1$$

- 1) Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = V_n - U_n$
a) Calculer t_0 et t_1
b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $t_n = 2(2\alpha - 1)^n$
c) En déduire la limite de la suite (t_n)
- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$
b) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
c) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite β .
d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n + V_n = 3$
e) En déduire la valeur de β

Exercice 17

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit sur $\mathbb{N}$ deux suites réelles U et V

$$\text{par : } \begin{cases} U_0 = a \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} V_0 = b \\ V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$
- 2) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.
- 3) Montrer que les suites U et V sont convergentes
- 4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S'_n = \frac{2}{U_{n+1}} - \frac{5}{2^{n+1}}$

c) Calculer alors la limite de la suite (S'_n) .

Exercice 24

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n) .

Exercice 25

1) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1}{k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right) \left(\frac{k+1}{k}\right)$

b) Soit $U_n = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

2) Soit $V_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que la suite (V_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.

- b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^n (b - a)$
- c) En déduire que les suites U et V sont adjacentes et qu'elles ont la même limite L .
- 5) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n V_n = ab$.
- b) En déduire la valeur de L .

Exercice 18

- 1) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$
- a) Dresser le tableau de variation de f .
- b) Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $1 - x \leq f(x) \leq 1$
- 2) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{n+k}\right)$
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\frac{1}{2n} \leq U_n \leq \frac{1}{n}$
- b) Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .
- 3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $W_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{1}{n+k}\right)$
- a) Justifier que tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$, on a : $1 - \frac{1}{n+k} \leq f\left(\frac{1}{n+k}\right) \leq 1$
- b) En déduire que $1 - U_n \leq W_n \leq 1$
- c) Déterminer alors la limite de la suite (W_n) .

Exercice 19

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{2}{U_n} \end{cases}$

- 1) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $U_n \geq 1$.
- 2) Montrer que la suite U est croissante.
- 3) Montrer que la suite U diverge vers $+\infty$.
- 4) a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $4 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 4 + 2(U_{n+1} - U_n)$
- b) En déduire que pour tout entier naturel n on a : $4n \leq U_n^2 - 1 \leq 4n + 2U_n - 2$
- c) Montrer alors que pour tout entier naturel n on a : $1 - \frac{2}{U_n} + \frac{1}{U_n^2} \leq \frac{4n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$
- d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}}{U_n}\right)$

Exercice 20

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 1 : U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- 2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.
- b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.
- c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

b) En déduire que la suite (S_n) converge vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 23

A) Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$

b) Montrer que la suite U est monotone.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2) Soient les suites V et S définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - U_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^n V_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5} V_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

d) Déterminer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

3) Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{1-U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_{n+1} = (W_n)^2$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $W_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

4) a) Calculer en fonction de n la somme $A_n = \sum_{k=0}^n 2^k$

b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $P_n = W_0 \times W_1 \times \dots \times W_n$

Exprimer P_n en fonction de n .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{P_n}{W_{n+1}}\right)$

B) Soit (S'_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S'_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^n 2^k U_k$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S'_{n+1} - S'_n = \frac{1}{2^{n+1}} \left(2^{n+1} U_{n+1} - \sum_{k=1}^n 2^k U_k\right)$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n 2^k U_k < 2^{n+1} U_{n+1}$

2) a) Montrer que la suite (S'_n) est croissante.

b) En utilisant la question 1) b), montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S'_n < 2$

c) En déduire que la suite (S'_n) est convergente.

3) a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{2^{n+1}}{U_{n+1}} - \frac{2^n}{U_n} = 2^n U_n$

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$. Retrouver la limite la suite (U_n)

Exercice 21

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{1+U_n} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1 et U_2

b) Montrer, par récurrence, que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 3$

c) Calculer la limite de la suite (U_n) .

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-3}{U_n}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Retrouver la limite de (U_n) .

3) On considère la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = \frac{3}{U_n}$ et pose $S_n = \sum_{k=0}^n W_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $W_n = 1 - V_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left[\left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) \right]$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 22

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{3}{2}$ et $U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{1+U_n}} : n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = 1$ et $V_{n+1} = \frac{V_n}{U_n} ; n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$; $V_{n+1} \geq \frac{\sqrt{10}}{3} V_n$.

b) En déduire par récurrence que pour tout $n \geq 1$; $V_n \geq \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{10}}{3} \right)^{n-1}$

c) puis déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

3) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{V_k^2} ; n \geq 1$

a) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{V_k^2} \leq \frac{45}{2} \left(1 - \left(\frac{9}{10} \right)^n \right)$