

### Exercice 1

Soit  $OAB$  un triangle rectangle isocèle en  $O$  et tel que  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

Soit  $C$  le milieu du segment  $[AB]$  et soit  $M$  un point de la droite  $(AB) \setminus \{A\}$  tel que

$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AO}$  et le point  $N$  définie par  $\overrightarrow{BN} = -\alpha \overrightarrow{BO}$  où  $\alpha$  est un réel non nul.

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement  $R$  tel que  $R(A) = B$  et  $R(M) = N$ .  
 b) Montrer que  $R$  est une rotation dont on déterminera l'angle.  
 c) Soit  $\Omega$  le centre de  $R$ , montrer que  $OA\Omega B$  est un carré.
- 2) Soit  $S$  la similitude directe de centre  $\Omega$  et tel que  $S(O) = B$ .  
 a) Déterminer le rapport et l'angle de  $S$ .  
 b) Soit  $E$  le milieu du segment  $[\Omega B]$  montrer que  $S(C) = E$ .
- 3) a) Soit  $I$  le milieu du segment  $[MN]$ , montrer que  $S(M) = I$ .  
 b) Déterminer alors l'ensemble des points  $I$  lorsque le point  $M$  décrit la droite  $(OA) \setminus \{A\}$ .
- 4) Soit  $\varphi$  la similitude indirecte qui transforme  $A$  en  $C$  et  $O$  en  $B$  et soit  $F$  le milieu du segment  $[OB]$ .  
 a) Déterminer le rapport de  $\varphi$ .  
 b) Caractériser l'application  $\varphi \circ S^{-1}$ .  
 c) En déduire que  $\varphi(C) = F$ .
- 5) a) Montrer que  $\varphi$  admet un unique point invariant  $\Omega'$ .  
 b) Déterminer et construire  $\Omega'$ .  
 c) Déterminer l'axe  $\Delta$  de  $\varphi$ .

### Exercice 2

Soit  $ABC$  un triangle équilatéral tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

On désigne par  $O$  le milieu de  $[BC]$  et par  $D$  le symétrique de  $A$  par rapport à  $O$ .

Soient  $I$  et  $J$  les projetés orthogonaux respectifs de  $O$  et  $D$  sur  $(AC)$ .

- 1) Soit  $f$  la similitude directe qui transforme  $O$  en  $I$  et  $D$  en  $J$ .  
 a) Déterminer le rapport et l'angle de  $f$ .  
 b) Montrer que  $A$  est le centre de  $f$ .

2) On désigne par  $E$  le symétrique du point  $O$  par rapport au point  $I$ .

Montrer que  $f(B) = O$  et que  $f(C) = E$ .

3) Soit  $g$  la similitude indirecte telle qui transforme  $B$  en  $O$  et  $C$  en  $E$

Déterminer le rapport de  $g$  et montrer que  $g(O) = I$

4) a) Montrer que  $g = S_{(OE)} \circ f$

b) Montrer que  $g(D) = A$  et que  $g(A) = J$ .

5) Soit  $\Omega$  le centre de  $g$ .

a) Montrer que  $(g \circ g)(D) = J$  et en déduire que  $\Omega$  appartient à la droite  $(DJ)$ .

b) Montrer que  $\Omega$  appartient à la droite  $(BI)$

c) Construire le point  $\Omega$  et son axe  $\Delta$ .

**Exercice 1**

1) a) On a :  $AM = \|\overrightarrow{AM}\| = \|\alpha\overrightarrow{AO}\| = |\alpha|OA$

$BN = \|\overrightarrow{BN}\| = \|-\alpha\overrightarrow{BO}\| = \|\alpha\overrightarrow{BO}\| = |\alpha|OB$

or  $OA = OB$  donc  $AM = BN \neq 0$

ainsi existe un unique déplacement  $R$

tel que  $R(A) = B$  et  $R(M) = N$ .

b) Soit  $\alpha$  l'angle de  $R$

$$\alpha \equiv (\widehat{AM, BN}) \equiv [2\pi] \equiv (\widehat{\alpha\overrightarrow{AO}, -\alpha\overrightarrow{BO}}) [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{AO, BO}) + \pi[2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{OA, OB}) + \pi[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} + \pi[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

$\alpha \neq 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$  donc  $R$  est une rotation d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

c) On a :  $\Omega$  est le centre de  $R$  et  $R(A) = B$  donc

$$\begin{cases} (\widehat{\Omega A, \Omega B}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \\ \Omega A = \Omega B \\ R(\Omega) = \Omega \end{cases} \quad \text{ainsi } O A \Omega B \text{ est un carré.}$$

2) On a :  $S$  une similitude directe de centre  $\Omega$  et  $S(O) = B$ .

a) Soit  $k$  le rapport de  $S$  ;  $k = \frac{\Omega B}{\Omega O} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soit  $\beta$  l'angle de  $S$  ; on a :  $\beta \equiv (\widehat{\Omega O, \Omega B})[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) On a :  $C = \Omega * O$  donc  $S(C) = S(\Omega) * S(O) = \Omega * B$

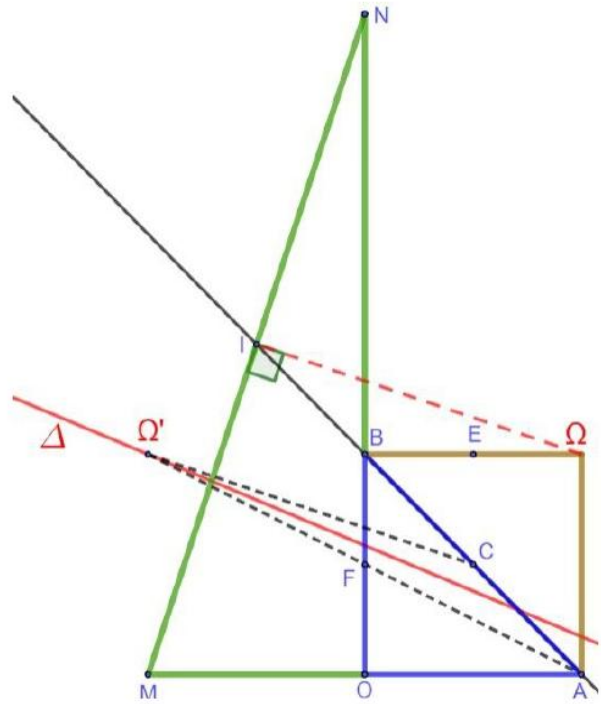
or  $\Omega * B = E$  donc  $S(C) = E$ .

3) a) On a :  $R(M) = N \Leftrightarrow$  donc  $\begin{cases} \Omega M = \Omega N \\ (\widehat{\Omega M, \Omega N}) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

donc le triangle  $\Omega MN$  est isocèle rectangle en  $\Omega$  et  $I = M * N$  donc  $[\Omega I]$  est la bissectrice

intérieure du secteur  $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega N})$  et  $(\Omega I) \perp (\Omega M)$  ainsi dans le triangle  $\Omega MI$  indirecte

rectangle en  $I$  on a :  $(\widehat{\Omega M, \Omega I}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$  et  $\frac{\Omega I}{\Omega M} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$g(A) = (S_{(OE)} \circ f)(A) = S_{(OE)}(f(A)) = S_{(OE)}(A) = J \quad \text{ainsi } g(A) = J$$

$$5) \quad g(\Omega) = \Omega$$

$$a) \quad (g \circ g)(D) = g(g(D)) = g(A) = J$$

or  $g$  est une similitude indirecte de centre  $\Omega$  et rapport  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  donc  $g \circ g$  est une homothétie  $h$  de

centre  $\Omega$  et rapport  $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$  donc  $h(D) = J$  donc  $\Omega$ ,  $D$  et  $J$  sont alignés ainsi  $\Omega \in (DJ)$ .

$$b) \quad (g \circ g)(B) = g(g(B)) = g(O) = I \quad \text{donc } h(B) = I \quad \text{ainsi } \Omega \in (BI).$$

c) On a :  $\Omega \in (DJ) \cap (BI)$  d'où la construction du point  $\Omega$

on a :  $g(D) = A$  donc  $\Delta$  porte la bissectrice intérieure du secteur  $(\Omega D, \Omega A)$

d'où la construction de  $\Delta$

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{\Omega I}{\Omega M} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \widehat{(\vec{\Omega M}, \vec{\Omega I})} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \\ S(\Omega) = \Omega \end{cases} \Leftrightarrow S(M) = I$$

**b)** Dans le triangle  $\Omega AC$  on a  $\widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega C})} \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$  et  $\frac{\Omega C}{\Omega A} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  donc  $S(A) = C$

et  $S(O) = B$  donc  $S((OA)) = (BC)$

On a  $M \in (OA) \setminus \{A\}$  ; donc  $S(M) \in S((OA) \setminus \{A\})$  donc  $I \in (BC) \setminus \{C\}$

ainsi lorsque le point  $M$  décrit la droite  $(OA) \setminus \{A\}$ , l'ensemble des points  $I$  est  $(BC) \setminus \{C\}$

**4)** On a :  $\varphi$  une similitude indirecte  $\varphi(A) = C$  et  $\varphi(O) = B$

**a)** Soit  $k$  le rapport de  $\varphi$  donc  $k = \frac{CB}{OA} = \frac{AC}{OA} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

**b)** On a :  $\varphi \circ S^{-1}$  est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte

donc :  $\varphi \circ S^{-1}$  est une similitude indirecte de rapport :  $\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$

donc  $\varphi \circ S^{-1}$  est un antidéplacement

$$\varphi \circ S^{-1}(B) = \varphi(S^{-1}(B)) = \varphi(O) = B ; \varphi \circ S^{-1}(C) = \varphi(S^{-1}(C)) = \varphi(A) = C$$

$$\varphi \circ S^{-1}(B) = B \text{ et } \varphi \circ S^{-1}(C) = C \text{ donc } \varphi \circ S^{-1} = S_{(BC)}$$

(un antidéplacement qui fixe deux points distincts est une symétrie orthogonale)

$$\text{c) } \varphi \circ S^{-1}(E) = \varphi(S^{-1}(E)) = \varphi(C)$$

$$\text{or } S_{(BC)}(E) = F \text{ donc } \varphi(C) = F$$

**5) a)** On a :  $\varphi$  de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1$  donc  $\varphi$  admet un unique point invariant  $\Omega'$ .

**b)** On a  $\varphi$  est une similitude indirecte de centre  $\Omega'$  est de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  donc

$$\varphi \circ \varphi \text{ est une homothétie de centre } \Omega' \text{ et de rapport } \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

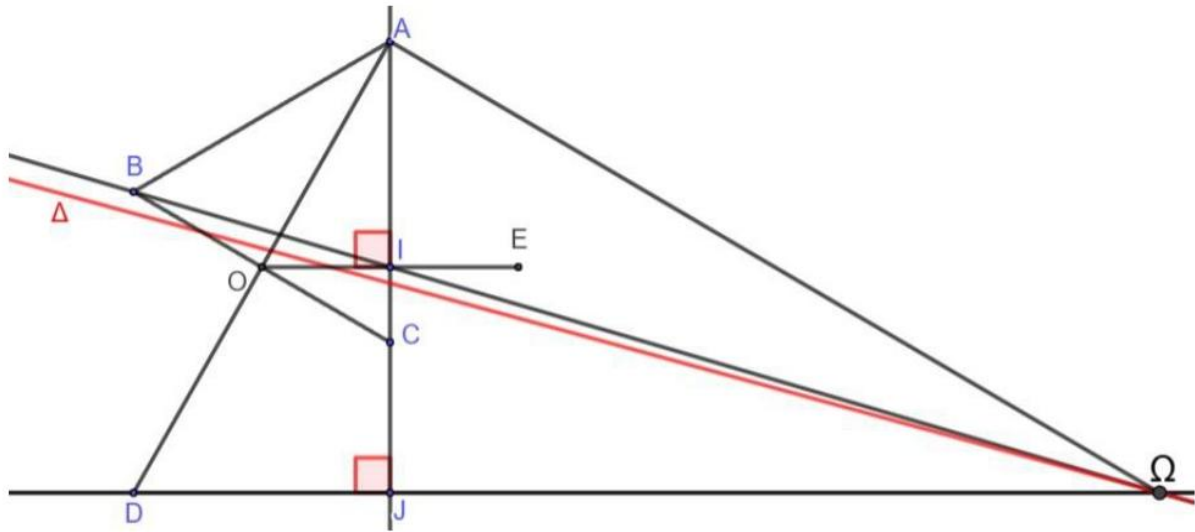
$$\text{donc } \varphi \circ \varphi = h_{(\Omega'; \frac{1}{2})}$$

$$\varphi \circ \varphi(A) = \varphi(\varphi(A)) = \varphi(C) = F \text{ ainsi } h_{(\Omega'; \frac{1}{2})}(A) = F \Leftrightarrow \vec{\Omega'F} = \frac{1}{2}\vec{\Omega'A} \Leftrightarrow \vec{F\Omega'} = \vec{AF}$$

d'où la construction de  $\Omega'$ .

**c)** On a  $\varphi(A) = C$  donc l'axe  $\Delta$  de  $\varphi$  porte la bissectrice  $\widehat{A\Omega'C}$  d'où la construction de  $\Delta$

### Exercice 2



**1) a) On a :  $f(0) = I$  ;  $f(D) = J$**

Soit  $k$  le rapport de  $f$ , donc  $k = \frac{IJ}{OD}$

**dans le triangle  $ADJ$  on a :  $(OI) \perp (AC)$  et  $(DJ) \perp (AC)$  donc  $(OI) \parallel (DJ)$  et  $O$  est le milieu de  $[AD]$   
donc  $I$  est le milieu de  $[AJ]$**

et  $[AO)$  bissectrice de  $\widehat{ABC}$  donc  $\widehat{OAC} = \frac{\pi}{6}$

donc  $k = \frac{IJ}{OD} = \frac{AI}{AO} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$       ainsi  $k = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Soit  $\alpha$  l'angle de  $f$ , donc  $\alpha \equiv (\widehat{OD, IJ}) \equiv (\widehat{AO, AC}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  ainsi  $\alpha \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

**b) On a :  $O = A * D$  donc  $f(O) = f(A) * f(D)$  donc  $I = f(A) * J$  or  $I = A * J$  donc  $f(A) = A$  ainsi  $A$  est le centre de  $f$ .**

2) On a :  $\frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  donc  $f(B) = 0$

**On a :  $0 = B * C$  donc  $f(0) = f(B) * f(C)$  donc  $I = 0 * f(C)$  or  $I = 0 * E$  donc  $f(C) = E$**

**3)  $g(B) = 0$  et  $g(C) = E$**

Soit  $k'$  le rapport de  $g$ , donc  $k' = \frac{OE}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  (car  $f(B) = O$  et  $f(C) = E$  donc  $\frac{OE}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ )

ainsi  $k' = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**On a :  $0 = B * C$  donc  $g(0) = g(B) * g(C)$  donc  $g(0) = 0 * E$  or  $I = 0 * E$  donc  $g(0) = I$**

**4) a) On a :**  $(S_{(\varrho_F)} \circ f)(B) = S_{(\varrho_F)}(f(B)) = S_{(\varrho_F)}(O) = 0 = g(B)$

$$(S_{(\varrho E)} \circ f)(C) = S_{(\varrho E)}(f(C)) = S_{(\varrho E)}(E) = E = g(C)$$

$S_{(OE)}$  o  $f$  et  $g$  sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts

ainsi  $S_{(OE)} \circ f = g$

**b)**  $g(D) = (S_{(OE)} \circ f)(D) = S_{(OE)}(f(D)) = S_{(OE)}(J) = A$  ainsi  $g(D) = A$