SUITES REELLES 4eme Sc Expérimentales

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n+3}{U_n+4}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de U_n.

Exercice 2

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_1 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \le U_n \le 3$.

2) Montrer que la suite U est croissante.

3) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 3

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{2U_n}{\sqrt{3+U_n^{\,2}}}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \le U_n \le 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \frac{U_n^{\,2}-1}{U_n^{\,2}}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

Exercice 4

Soit la suite réelle U définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{8U_n+2}{U_n+7} \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = 8 - \frac{54}{U_n+7}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 \le U_n \le 2$

c) Montrer que la suite U est croissante.

d) En déduire que la suite U est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-2}{U_n+1}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Retrouver la limite de la suite (U_n).

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n - 1 = \frac{-3}{U_n+1}$

b) Calculer $\forall\ k \in IN$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{-3}{\mathrm{U_k} + 1}$

Exercice 5

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2+U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2 et en déduire que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$.

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n}{1+U_n}$

a) Montrer que la suite (V_n) est géométrique.

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \frac{1}{2^{n+1}-1}$

c) Retrouver la limite la suite (U_n).

Exercice 6

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{U_n-8}{2U_n-9}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n < 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite réelle (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n-4}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n et retrouver la limite de la suite (U_n).

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \le \frac{1}{7}|U_n - 1|$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \le 4\left(\frac{1}{7}\right)^n$

c) Retrouver la limite de la sui

b) Soit $U_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ calculer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

2) Soit $V_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que la suite (V_n) est croissante.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$on a : $V_{2n} - V_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

c) En déduire que la suite (V_n) diverge vers $+\infty$.

Exercice 18

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \alpha U_n + (1-\alpha)V_n \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = (1-\alpha)U_n + \alpha V_n \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}$ avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

1) Soit la suite (t_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = V_n - U_n$

a) Calculer t_0 et t_1

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $t_n = 2(2\alpha-1)^n$

c) En déduire la limite de la suite (t_n)

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq V_n$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.

c) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers une même limite β.

d) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n + V_n = 3$

e) En déduire la valeur de β.

Exercice 7

On considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par $a_0 = 1$; $b_0 = 7$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \qquad \text{et} \qquad b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n + 2b_n)$$

1) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = b_n - a_n$

a) Calculer Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) Exprimer U_n en fonction de .

c) En déduire la limite de la suite (U_n).

2) a) Comparer a_n et b_n

b) Montrer que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante.

3) Montrer que les suites a_n et b_n sont adjacentes et qu'elles convergent vers une même limite α

4) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = a_n + b_n$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite constante.

b) En déduire la valeur de α.

Exercice 8

Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{1 + ax^2}$

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$

On suppose que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$

1) On suppose que $0 < a < 1$

a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq U_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante

c) Montrer que la suite (U_n) est convergente puis déterminer sa limite

3) On suppose que $a > 1$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = U_{n+1}^2 - U_n^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1}^2 - U_n^2 = a^n$

c) On pose $S_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = 1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^{n-1}$

Justifier que $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$

d) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = \sqrt{\frac{1-a^n}{1-a}}$

Exercice 9

On définie sur $\mathbb{N}$ deux suites réelles U et V par :

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$

c) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $P_n = V_0 \times V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ montrer que $P_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n+1}-1}$

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right)$

Exercice 15

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1+(U_n)^2}{2U_n} \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 1$

2) a) Etudier la monotonie de la suite (U_n) .

b) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et retrouver la limite de la suite (U_n)

4) Soit la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} U_k$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $n \leq S_n \leq n + 1 - \frac{1}{2^n}$

b) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 16

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{5U_n+3}{U_n+3}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_n \leq 3$.

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n).

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_{n+1} - 3| \leq \frac{2}{5}|U_n - 3|$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ $|U_n - 3| \leq \left(\frac{2}{5}\right)^n$

3) On pose $\forall n \in \mathbb{N}$; $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$

a) Montrer que $3n - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^k \leq S_n \leq 3n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{5}\right)^k$

b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 17

1) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on a : $1 - \frac{1}{k^2} = \left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$$\begin{cases} U_0 = 1 & V_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} & et \quad V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < V_n$

2) Montrer que la suite U est croissante et que la suite V est décroissante.

3) Montrer que les suites U et V sont convergentes

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $V_n - U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) En déduire que les suites U et V sont adjacentes et qu'elles ont la même limite L.

5) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_nV_n = 3$.

b) En déduire la valeur de L.

Exercice 10

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{3U_n + 4} \end{cases}$ $\forall n \in IN.$

1) a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $0 \le U_n \le 4$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in IN$ on a : $4 - U_{n+1} \le \frac{3}{4}(4 - U_n)$. (On pourra commencer par exprimer $4 - U_{n+1}$ en fonction de $4 - U_n$

b) En déduire que $\forall n \in IN$ on a : $4 - U_n \le 4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite (U_n).

3) On considère la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.

a) Montrer que la suite (S_n) est croissante.

b) Montrer par l'absurde que la suite (S_n) n'est pas majorée.

c) Déterminer alors la limite de la suite (S_n).

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n \ge 4n - 12\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$.

(On pourra utiliser le résultat de la question 2) b)

b) Retrouver alors la limite de la suite (S_n).

Exercice 11

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2}$

1) a) Etudier le sens de variation sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \le U_n \le 1$

c) Montrer que la suite U est convergente.

d) Déterminer la limite de la suite U.

2) Soit les suites V et S définies sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 1 - U_n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_{n+1} \leq \frac{2}{5} V_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$

c) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq S_n \leq \frac{5}{6}\left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right]$

d) Déterminer alors : $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$

Exercice 12

Soit la suite réelle U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{12 + U_n} \end{cases}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq 4$

b) Etudier la monotonie de la suite U.

c) En déduire que la suite U est convergente et calculer sa limite.

2) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $4 - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(4 - U_n)$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 4| \leq 3\left(\frac{1}{4}\right)^n$

c) Retrouver alors la limite de la suite U.

Exercice 13

Soit la suite réelle (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 1$.

2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

3) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $2 \leq U_{n+1}^2 - U_n^2 \leq 2 + U_{n+1} - U_n$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $2n \leq U_n^2 - 1 \leq 2n + U_n - 1$ et que $\lim_{n\to+\infty} U_n = +\infty$

4) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $1 - \frac{1}{U_n} \leq \frac{2n}{U_n^2} \leq 1 - \frac{1}{U_n^2}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n}}{U_n}$

Exercice 14

Soit la suite (U_nU_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{1+(U_n)^2}$

1) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < U_n < 1$.

b) Montrer que la suite , (U_n) est monotone.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{1-U_n}{1+U_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$