M. Wissem Fligène

Nombres complexes

Exercice 1

1. Soit le nombre complexe $z = 2 + i$. Ecrire sous la forme algébrique chacun des nombres complexes suivants :

$$2 + iz \quad ; \quad (2 - z)^3 \quad ; \quad \frac{i}{1 + iz} \quad ; \quad \frac{1 - \bar{z}}{z}$$

2. Pour tout nombre complexe $z = x + iy$ distinct de -1, on associe le nombre complexe $z' = \frac{z-i}{z+1}$
   a) En posant $z' = x' + iy'$; exprimer x' et y' en fonction de x et y
   b) Déterminer l'ensemble H des points $M(z)$ tels que z' soit réel.

Exercice 2

Soit $z = x + iy$ où x et y sont deux réels

1. On pose $Z = (1+2i)z + 3$. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de Z
2. Déterminer z tel que $(1+2i)z + 3 = \bar{z}$
3. Calculer Z lorsque : a) $z = 1 + i$ b) $z = \dfrac{2+3i}{4+5i}$
4. Trouver z lorsque $Z = \dfrac{1}{i}$

Exercice 3

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On définit pour tout nombre complexe z différent de 0 et de (-3), $f(z) = \dfrac{z^2 - 1}{z(z+3)}$

   Ecrire sous forme algébrique les nombres suivants : $f(1-i)$ et $f(1+i)$
2. Ecrire sous forme algébrique : $(2+i)^3 + (1-2i)^3$
3. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes les équations suivantes :
   a. $3(z-i) - 3i(z - 2 + 3i) = (i-1)(z+i)$
   b. $z - 2\bar{z} = 9 + 2i$
4. Pour tout nombre complexe $z \neq i$, On pose $Z = \dfrac{z - 1 + 2i}{z - i}$
   a. Déterminer l'ensemble (E) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des réels
   b. Déterminer l'ensemble (F) des points $M(z)$ pour lesquels $M'(Z)$ appartient à l'axe des imaginaires

Exercice 4

Dans le plan complexe P, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 1$ et $z_B = i$. On pose $Z = \dfrac{z-1}{iz+1}$ pour tout $z \neq i$

1. Déterminer les éventuelles valeurs de z telles que : $Z = 1 + 2i$
2. a. Montrer que $|iz + 1| = |z - i|$

   b. Déterminer et tracer l'ensemble (E_1) des points M d'affixes z tels que $|Z| = 1$
3. a. En posant $z = x + iy$ où x et y sont des réels, vérifier que la partie réelle de Z est

   $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{x + y - 1}{x^2 + (1-y)^2}$ et que la partie imaginaire de Z et $\mathrm{Im}(Z) = \dfrac{-x^2 - y^2 + x + y}{x^2 + (1-y)^2}$

   b. Déterminer et tracer l'ensemble (E_2) des points M d'affixes z tels que Z soit un nombre réel
   c. Déterminer et tracer l'ens... z tels que z soit un imaginair...

Exercice 5

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$,on considère le point A d'affixe i.

A tout point M d'affixe z ≠ 0 ,on associe le point M'(z') tel que $z'=\dfrac{z-i}{z}$

1. a. Déterminer et construire l'ensemble des point M tel que $|z'|=1$

   b. Déterminer l'ensemble des point M tel que z' soit réel

   c. Déterminer l'ensemble des point M tel que z'soit imaginaire

2. a. Montrer que si M décrit la médiatrice du segment [OA] alors M′ décrit un cercle que l'on précisera

   b. ∗ Vérifier que $z'-1=\frac{-i}{z}$

   ∗ Déduire que si M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 alors M′ décrit un cercle que l'on précisera

Exercice 6

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points $A(i)$ et $B(-i)$. A tout point M distinct de B d'affixe z on associe le point M' d'affixe z' tel que $z'=\dfrac{1-z}{1-iz}$

1. a. Déterminer l'ensemble des points M tel que z' soit réel

   b. Déterminer l'ensemble des points M tel que $|z'|=1$

2. a. Montrer que $\forall z\in C\setminus\{-i\}$; $z'+i=\dfrac{-1+i}{z+i}$

   b. En déduire que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}})+(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM}})\equiv\dfrac{3\pi}{4}[2\pi]$ et que $BM\times BM'=\sqrt{2}$

   c. En déduire que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera

Exercice 7

On donne les nombres complexes suivants : $z_1=5\sqrt{2}(1+i)$ et $z_2=-5\left(1+i\sqrt{3}\right)$

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes : z_1, z_2, $\overline{z_1}$ et $\dfrac{1}{z_1}$

2. Soit Z le nombre complexe tel que $z_1Z=z_2$

   Ecrire Z sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique

3. Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$

Exercice 8

On considère le nombre complexe $z=1+i\sqrt{3}$

1. Déterminer la forme trigonométrique de z; $-z$; z^2 et $\dfrac{2}{z}$

2. Montrer que z^{2016} est un réel

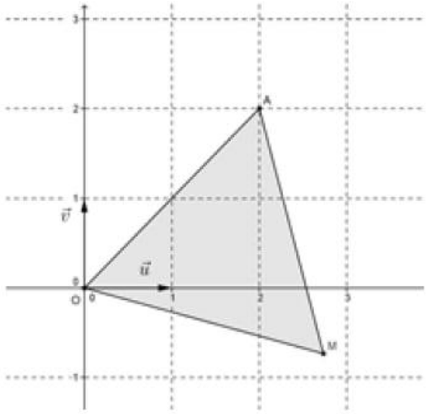
3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

   On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives z; $-z$ et z^2

   a. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

   b. En déduire la nature du triangle ABC

Exercice 9 ☺



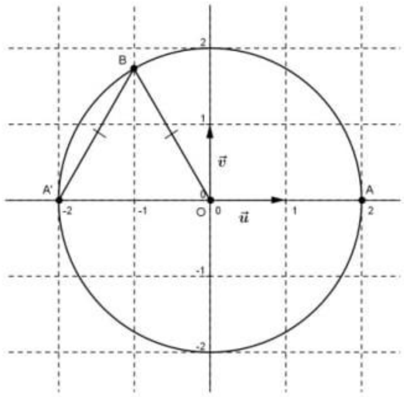
Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Le triangle OAM est équilatéral.

On donne $A(2,2)$.

Déterminer le module et un argument de chacun des affixes des points A et M

Exercice 10 ☺



Dans la figure ci-contre, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, ζ est le cercle de centre O et de rayon 2 et B est un point de ζ d'affixe z_B.

1. a. Déterminer par une lecture graphique le module et un argument de z_B.
   b. En déduire la forme algébrique de z_B.
2. a. Placer sur la figure le point B' d'affixe $z_{B'}$ tel que $z_{B'} = \overline{z_B}$
   b. Montrer que $OBA'B'$ est un losange.

Exercice 11

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a = \dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$; $b = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $c = a + b$

1. Ecrire les nombres complexes a et b sous forme exponentielles
2. Placer les points A et B dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$
3. Montrer que OACB est un carré
4. En déduire la forme trigonométrique de c
5. Calculer alors $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$

Exercice 12 ☺

1. Soit les nombres complexes $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$
   a) Ecrire z_1 sous forme algébrique.
   b) Ecrire z_2 sous forme exponentielle.
2. Dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{2}z_1$ et $z_B = i\overline{z_2}$
   a) Montrer que OAB est un triangle isocèle.
   b) Ecrire $\dfrac{z_A}{z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
   c) En déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$.
   d) Donner les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

3. Pour tout point $M(z) \in P\backslash\{B\}$, on associe le point $M'(z')$ tel que : $z' = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$.

   a) Déterminer l'ensemble des points M lorsque M' décrit la droite $(O, \vec{u})$.

   b) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 13 ☺

On considère les nombres complexes suivants: $z = 1+i$, $y = 1 - i\sqrt{3}$, $U = \dfrac{z^3}{\bar{y}^2}$

1) Écrire sous forme exponentielle z et y. En déduire que $U = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$.

2) Montrer que U^{24} est un réel strictement positif et que U^6 est imaginaire.

3) a) Vérifier que $U = \dfrac{\sqrt{3}+1}{4} + i\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

   b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice 14 ☺

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et D d'affixes respectives $a = -i$, $b = 3i$ et $d = -2 + i$

I- 1- Placer les points A, B et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2- a- Ecrire $\dfrac{d-a}{d-b}$ sous forme algébrique.

b- Déduire que ABD est un triangle rectangle et isocèle en D.

c- Déterminer l'affixe c du point C tel que $ACBD$ soit un carré.

II- A tout point M distinct de B d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \dfrac{iz-1}{z-3i}$

1- Déterminer l'ensemble des points M tel que z' est imaginaire.

2- a- Montrer que $|z'| = \frac{MA}{MB}$

b- En déduire que si M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors le point M' appartient à un cercle que l'on déterminera.

3- Soit I le milieu du segment $[AB]$ d'affixe z_I.

a- Vérifier que $z' - z_I = \dfrac{-4}{z-b}$.

b- En déduire que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{IM'}}\right) \equiv \pi - \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right)[2\pi]$.

c- Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi-droite $[B, \vec{u})$ privé de B.

Exercice 15 ☺

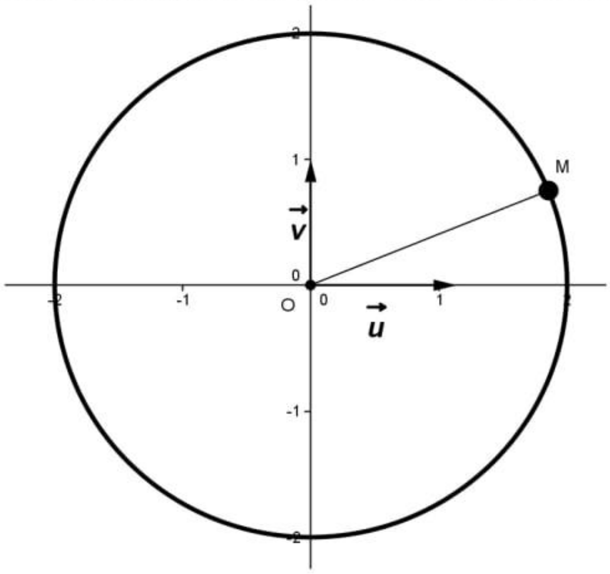
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Dans l'annexe ci-dessous M représente le point d'affixe $z = 2e^{i\alpha}$ avec $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

1- Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes $\dfrac{1}{z}$; $-\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$

2- Placer (sur l'annexe) les points N, P et Q d'affixes respectives $\dfrac{1}{z}$; $-\dfrac{1}{z}$ et $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$

3- Déterminer la valeur de α pour laquelle les points O, N et Q sont alignés.



Exercice 16 ☺

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A , B et C les points d'affixes respectives i , -1 et 1.

A tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z+1}{z-i}$ (z un nombre complexe diffèrent de i).

1- a- Déterminer l'ensembles des points M tels que z' soit réel.

b- Déterminer l'ensemble de point M tel que z' soit imaginaire.

2- a- Montrer que pour tout $z \neq i$ on a : $OM' = \dfrac{BM}{AM}$.

b- Déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit la médiatrice de segment $[AB]$.

3- a- Montrer que $|(z'-1)(z-i)| = \sqrt{2}$.

b- En déduire l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle de centre A est de rayon $\sqrt{2}$

Exercice 17 ☺

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixes respectifs $z_A = \sqrt{3}+i$ et $z_B = -1+i\sqrt{3}$.

1- a- Ecrire sous forme exponentielle z_A et z_B.

b- Construire les points A et B dans le repère.

c- Ecrire $\dfrac{z_B}{z_A}$ sous forme exponentielle.

d- Déduire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.

e- Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point C pour que le quadrilatère $OACB$ soit un carré.

2- Soit un point M d'affixe $z_M = 1+e^{2i\theta}$ où $\theta \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

a- Montrer que $z_M = 2\cos\theta\, e^{i\theta}$ puis vérifier que c'est son écriture est sous forme exponentielle.

b- Déterminer la valeur de θ pour que M varie sur le cercle de centrer O et de rayon 2.

c- Déterminer la valeur de θ pour que O, A et M soient alignées.

Exercice 18

Cocher la bonne réponse :

1	La partie réelle du nombre complexe $z=(2+i)^2$ est	2	
		4	
		3	
2	La partie imaginaire du nombre complexe $z=(1-i)^2$ est	$-2i$	
		0	
		-2	
3	Le module du nombre complexe $z=4+3i$ est égal à :	7	
		$\sqrt{7}$	
		5	
4	Un argument du nombre complexe $z=2-2i$ est égal à	$\frac{\pi}{2}$	
		$-\frac{\pi}{4}$	
		$\frac{3\pi}{4}$	
5	Si $z=2-5i$ alors	$\overline{z}=2+5i$	
		$\overline{z}=-2+5i$	
		$\overline{z}=-2-5i$	
6	Soit z le nombre complexe de module 2 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ alors	$z=\sqrt{3}+i$	
		$z=1+i\sqrt{3}$	
		$z=2+i\frac{\pi}{3}$	
7	La forme exponentielle de $z=-2-2i$ est	$z=-2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$	
		$z=2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$	
		$z=2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}$	
8	La forme exponentielle de $\dfrac{-\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}}$ est	$z=-e^{-\frac{3\pi}{40}i}$	
		$z=-e^{\frac{37\pi}{40}i}$	
		$z=\dfrac{\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{5}}e^{i\pi}$	
9	Soient A et B deux points du plan complexe muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'affixes : $z_A=1+i$ et $z_B=3-i$. Soit I le milieu de [AB] d'affixe z_I alors :	$AB=2$	
		$z_I=2$	
		$z_I=\dfrac{z_A-z_B}{2}$	
10	Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux du plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})$ est	$\arg\left(\dfrac{z_B-z_A}{z_D-z_C}\right)$	
		$\dfrac{\arg(z_B-z_A)}{\arg(z_D-z_C)}$	
		$\arg\left(\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)$	

11	Soient A, B et C trois points distincts deux à deux du plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$. Si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = 3i$ alors	A, B et C sont alignés	
		ABC est un triangle rectangle en A	
		A, B et C appartiennent au cercle de diamètre [AB]	
12	Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $2i$. L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $2\|z-1-i\| = \sqrt{2}$ est	le cercle de diamètre [AB]	
		le cercle de diamètre AB	
		la médiatrice du segment [AB]	
13	Soient A, B et C trois points distincts deux à deux du plan complexe muni du repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Si $z_C = z_A + z_B$ alors	OACB est un parallélogramme	
		A, B et C sont alignés	
		A est le milieu de [BC]	
14	Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ et $2i$. L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $\|z-1-i\| = \|z-2i\|$ est	le cercle de diamètre [AB]	
		le cercle de diamètre AB	
		la médiatrice du segment [AB]	