

Enoncé logarithme népérien 4ème Sc Technique

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x \ln x - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- 2) a) Dresser le tableau de variation de f
b) Etudier la branche infinie de C .
c) Construire la courbe C .
- 3) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$
a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
b) Etudier la dérivabilité de g^{-1} à droite en -1
- 4) Tracer C' la courbe de g^{-1} dans le même repère.
- 5) Soit la fonction h définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = x^2 \ln x$.
a) Calculer $h'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$
b) Montrer l'existence et l'unicité de la primitive F de h sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1
c) Expliciter $F(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $g'(x) = -4x \ln x$.
b) Dresser le tableau de variation de g .
- 3) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α .
b) Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.
c) Déduire le signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$.
- 4) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$
a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
b) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$
c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$
- 5) a) Etudier les variations de f .
b) Tracer la courbe C_f de f .

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln^2 x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0.
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 2) Tracer C_f (unité graphique 4 cm).

Exercice 5

- 1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -1 + \ln x$.
 - a) Dresser le tableau de variation de g
 - b) Calculer $g(e)$ et déterminer le signe de $g(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
 - c) Déterminer la primitive G de g sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.
- 2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $\begin{cases} f(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative.
 - a) Montrer que f est continue à droite en 0
 - b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- 3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$, et interpréter les résultats graphiquement.
 - b) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = xg(x)$.
 - c) Dresser le tableau de variation de f
- 4) a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point $A(1, f(1))$.
b) Montrer que A est un point d'inflexion de C_f .
- 5) a) Déterminer l'intersection de la courbe C_f avec l'axe des abscisses.
b) Tracer T et C_f .
- 6) Soit F la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $F(x) = \frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3$.
Montrer que F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.

Cliquer ci-dessous pour la version PDF de la série
logarithme népérien 4ème Sc Technique



[Fonctions logarithmes népérien 4ème Sc Techniques](#)

Exercice 1

$$1) \begin{cases} f(x) = x \ln x - x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \overbrace{x \ln x}^0 - x = 0 = f(0)$$

donc f est continue à droite en 0

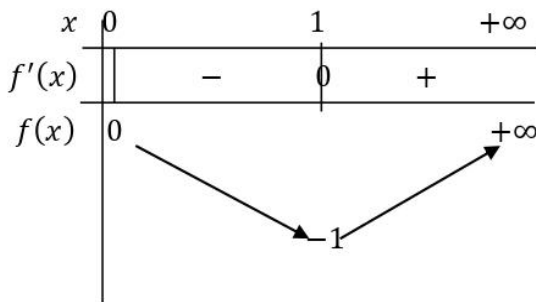
$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \overbrace{\ln x}^{-\infty} - 1 = -\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et C_f admet à droite en 0 une demi tangente verticale dirigée vers le bas.

2) a) $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = (x \ln x - x + 1)' = \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

donc $f'(x)$ prend le signe de $\ln x$ sur $]0, +\infty[$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln x - 1) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - 1 = +\infty$$

donc C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

c) Voir traçage C_f en fin de la correction.

3) a) On a : $g(x) = f(x)$ si $x \in [1, +\infty[$

On a g est continue et strictement croissante sur $[1, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $J = g([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$ ainsi g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [-1, +\infty[$.

b) La courbe de g admet à droite en 1 une demi tangente horizontale pour raison de symétrie avec la droite $\Delta: y = x$ la courbe de g^{-1} aura à droite en $g(1) = -1$ une demi tangente verticale d'où g^{-1} n'est pas dérivable à droite en -1

4) $C' = S_{\Delta}(C_f)$ avec $\Delta: y = x$ voir le trage de C' en fin de la correction.

$$5) a) \forall x \in]0, +\infty[; h'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

b) On a : f est continue sur $]0, +\infty[$ donc f admet une unique primitive F sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1

$$c) \text{ On a : } \forall x \in]0, +\infty[; h'(x) = 2x \ln x + x$$

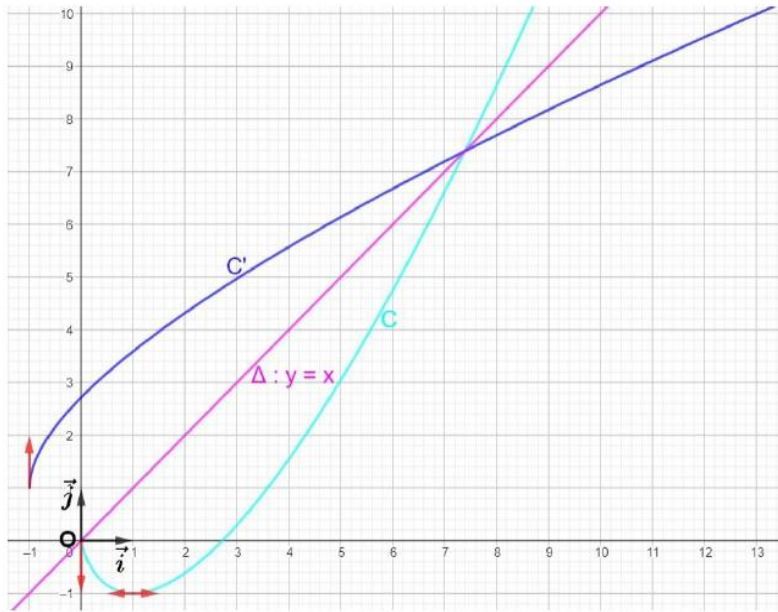
$$\begin{aligned}
 &= 2x \ln x - 2x + 3x \\
 &= 2(x \ln x - x) + 3x \\
 &= 2f(x) + 3x
 \end{aligned}$$

ainsi $h'(x) = 2f(x) + 3x \Leftrightarrow 2f(x) = h'(x) - 3x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}(h'(x) - 3x)$

$F(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) - \frac{3}{2}x^2\right) + c ; c \in \mathbb{R}$ d'où $F(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2\right) + c ; c \in \mathbb{R}$

or $F(1) = 0$ donc $\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right) + c = 0 ; -\frac{3}{4} + c = 0$ d'où $c = \frac{3}{4}$

ainsi $\forall x \in]0, +\infty[; F(x) = \frac{1}{2}\left(x^2 \ln x - \frac{3}{2}x^2\right) + \frac{3}{4}$



Exercice 2

$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x ; x \in]0, +\infty[$

1) $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \widetilde{x^2}^0 - 2 \widetilde{x^2 \ln x}^0 = 1$

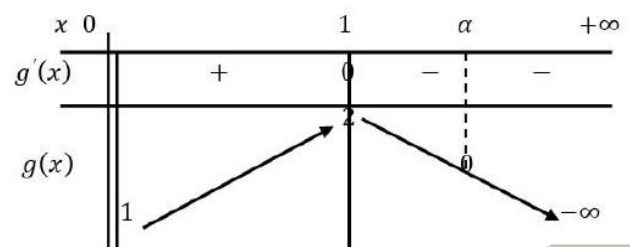
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + x^2 - 2x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \widetilde{x^2}^{+\infty} \left(\widetilde{1 - 2 \ln x}^{-\infty} \right) = -\infty$

2) a) Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a :

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2x - 2\left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x}\right) = 2x - 2(2x \ln x + x) \\
 &= 2x - 4x \ln x - 2x \\
 &= -4x \ln x
 \end{aligned}$$

b) Pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g'(x) = -4x \ln x$
donc $g'(x)$ prend le signe de $-\ln x$ sur $]0, +\infty[$

$g'(x) = 0 ; x = 1$



3) a)

** On a g est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$ donc g réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $g(]0, 1]) =]1, 2]$ or $0 \notin]1, 2]$ donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans $]0, 1]$

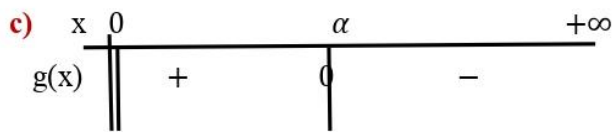
** On a g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $g([1, +\infty[) = [2, -\infty[$ or $0 \in [2, -\infty[$

donc l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[1, +\infty[$ une unique solution α

** Conclusion l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution α .

b) On a $g(1,8) \simeq$ et $g(1,9) \simeq$; $g(1,8) \times g(1,9) < 0$

donc $1,8 < \alpha < 1,9$.



4) $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$; $x \in]0, +\infty[$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{0}{\ln x}}{\frac{x^2}{1+x^2}} = 0$

b) $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$

donc $x \mapsto \frac{\ln x}{1+x^2}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ ainsi f est dérivable sur $]0, +\infty[$

pour tout $x \in]0, +\infty[$;

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+x^2) - 2x \ln x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x}}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2 \ln x}{x(1+x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$$

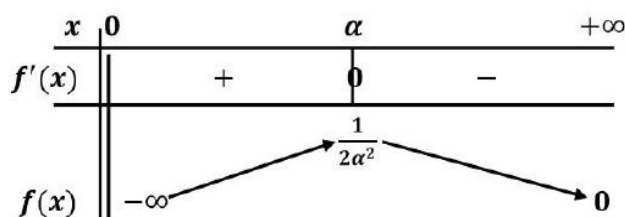
c) On a $f(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{1+\alpha^2}$

or $g(\alpha) = 0$ donc $1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0$ donc $2\alpha^2 \ln \alpha = 1 + \alpha^2$ donc $\ln \alpha = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}$

$$\text{donc } f(\alpha) = \frac{\frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2}}{1+\alpha^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\alpha^2(1+\alpha^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}$$

5) a) pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}$ donc $f'(x)$ prend le signe de $g(x)$ sur

$]0, +\infty[$; $f'(x) = 0$; $g(x) = 0$; $x = \alpha$



b)



Exercice 3

1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln^2 x = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)^2 = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln^2 x = 0$ donc f est dérivable à droite en 0.

c) $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = (x^2 \ln^2 x)' = 2x \ln^2 x + x^2 \times 2 \left(\frac{1}{x}\right) \ln x = 2x \ln^2 x + 2x \ln x$
 $= 2x \ln x (\ln x + 1)$

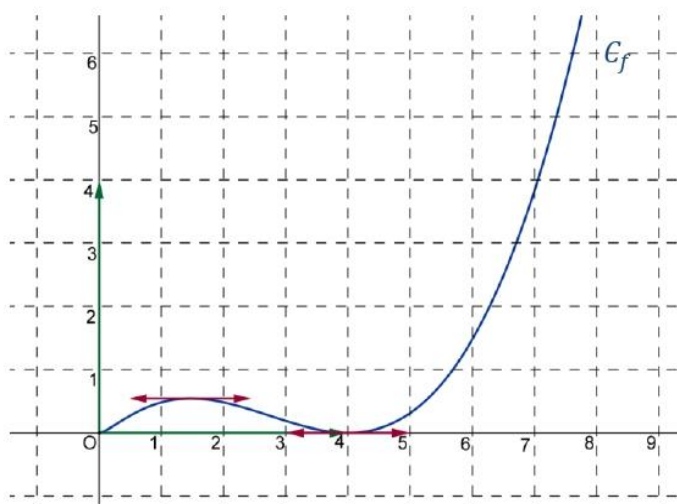
Etudions le signe de $\ln x + 1$ sur $]0, +\infty[$ $\ln x + 1 \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq -1 \Rightarrow \ln x \geq \ln \frac{1}{e} \Rightarrow x \geq \frac{1}{e}$

$\ln x \leq 0$ si $x \in]0, 1]$ et $\ln x \geq 0$ si $x \in [1, +\infty[$

d'où le tableau de variation de f .

x	0	$\frac{1}{e}$		1	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{e^2}$ $\searrow 0$		$\nearrow +\infty$		

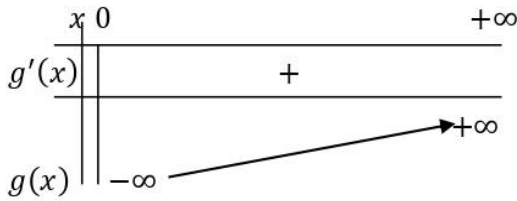
2)



Exercice 5

1) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = -1 + \ln x$.

a) $\forall x \in]0, +\infty[; g'(x) = (-1 + \ln x)' = \frac{1}{x} > 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -1 + \ln x = -\infty ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \ln x = +\infty$$

b) $g(e) = -1 + \ln e = -1 + 1 = 0$

$0 < x \leq e$ et g est croissante donc $g(x) \leq g(e)$ ainsi $g(x) \leq 0$

$x \geq e$ et g est croissante donc $g(x) \geq g(e)$ ainsi $g(x) \geq 0$

x	0	e	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

c) La fonction g est continue sur $]0, +\infty[$ donc g admet des primitives sur $]0, +\infty[$, soit G une primitive de g sur $]0, +\infty[$ donc $G(x) = -x + x \ln x - x + c ; c \in \mathbb{R}$

donc $G(x) = -2x + x \ln x + c ; c \in \mathbb{R}$

or $G(1) = 0$ donc $-2 + c = 0$ donc $c = 2$ donc $G(x) = 2 - 2x + x \ln x$.

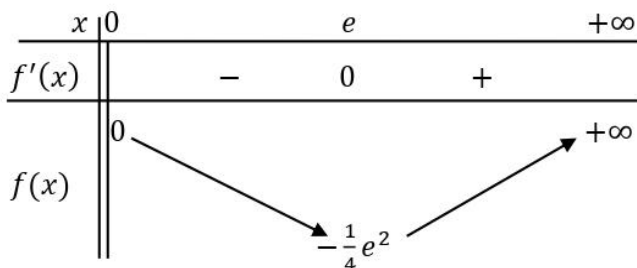
2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \tilde{x}^2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln x \right) = +\infty$$

b) $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = \left(-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x \right)' = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{2}x^2 + x^2 \ln x \right)'$
 $= \frac{1}{2} \left(-3x + 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} (-3x + 2x \ln x + x) = \frac{1}{2} (-2x + 2x \ln x)$
 $= -x + x \ln x = x(-1 + \ln x) = xg(x)$

c) On a $\forall x \in]0, +\infty[; f'(x) = xg(x)$

donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0, +\infty[$



3) a) $f'(1) = -1 ; f(1) = -\frac{3}{4} ; T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ donc $T : y = -x + \frac{1}{4}$

b) La fonction f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\forall x \in]0, +\infty[; f''(x) = (xg(x))' = xg'(x) + x(-1 + \ln x)'$$

$$= -1 + \ln x + x \times \frac{1}{x} = -1 + \ln x + 1 = \ln x$$

Donc $f''(x)$ est du signe de $\ln x$ sur $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	$\parallel$	-	0
			+

Donc $f''(x)$ s'annule en 1 tout en changeant de signe alors le point A est un point d'inflexion de C_f .

4) a) on a $f(0) = 0$ donc C_f coupe l'axe des abscisses au point O

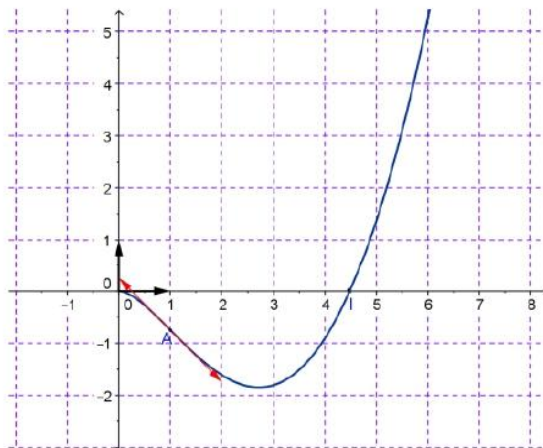
$$\text{pour tout } x \in]0, +\infty[, M(x, y) \in C_f \cap (O, \vec{t}) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln x\right) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ impossible ou } \begin{cases} -\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \ln x = \frac{3}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

donc $\begin{cases} x = e^{\frac{3}{2}} \\ y = 0 \end{cases}$ donc le point $I(e^{\frac{3}{2}}, 0)$ est un point d'intersection de la courbe C_f avec l'axe des

abscisses. Ainsi C_f coupe l'axe des abscisses aux points O et I.

b)



5) La fonction f est continue sur $]0, +\infty[$ donc f admet des primitives sur $]0, +\infty[$.

La fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$;

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, +\infty[; F'(x) &= \left(\frac{1}{6}x^3 \ln x - \frac{11}{36}x^3 \right)' = \frac{1}{6} \left(3x^2 \ln x + \frac{1}{x} \times x^3 \right) - \frac{3 \times 11}{36}x^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{6}x^2 - \frac{3 \times 11}{36}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{6}{36}x^2 - \frac{33}{36}x^2 \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{33}{36}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3 \times 9}{4 \times 9}x^2 = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{3}{4}x^2 = f(x) \end{aligned}$$

donc F est une primitive de f sur $]0, +\infty[$.