Nombres Complexes 4ème Sc Techniques et Sc Expérimentales

Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

1) Ecrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants : $\frac{8-i}{1-2i}$; $\frac{10}{3-i}$ et $\left(\frac{i-1}{2}\right)(1+i)^2$

2) Marquer les points A, B et C d'affixes respectives : $2+3i$, $3+i$ et $-1-i$

3) a) Montrer que ABC est un triangle rectangle en B.

b) Trouver l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un rectangle.

4) a) On pose $I = A * C$, trouver l'affixe du point I.

b) Déterminer et construire les ensembles suivants :

$E = \{M(z) \in P / |z-2-3i| = |z+1+i|\}$ et $F = \{M(z) \in P / |2\bar{z}-1+2i| = 5\}$

Exercice 2

On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \frac{3+i}{1+i}$ et $z_B = (-3+4i)\left(\frac{1-2i}{5}\right)$

1) Ecrire z_A et z_B sous la forme algébrique.

2) Placer les points A et B.

3) Montrer que le triangle OAB est isocèle rectangle

4) Déterminer l'affixe du point C tel que $OACB$ soit un carré.

Exercice 3

Soient les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$.

1) a) placer les points A, B, C et I.

b) Vérifier que I est le milieu du segment $[AC]$.

2) Montrer que le triangle ABC est isocèle.

3) Déterminer l'affixe z_D du point D pour que $ABCD$ soit un losange.

4) a) A tout point M d'affixe $z \neq 4+2i$ on associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{2z+4i}{z-4-2i}$

Montrer que : $OM' = \frac{2AM}{CM}$

b) Montrer que si le point M décrit la médiatrice du segment $[AC]$ alors le point M' décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice 4

1) Placer dans le plan complexe les points A, B, C et D d'affixes respectives : i ; $1-i$; $5+i$ et $4+3i$

2) Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

3) A tout point M du plan d'affixe $z \neq 1-i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{iz+1}{z-1+i}$

a) Montrer que $|z'| = \frac{AM}{BM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors M appartiendra à une droite que l'on précisera.

4) a) Montrer que $(z'-i)(z-1+i)=2+i$ et que $AM'\times BM=\sqrt{5}$

b) Montre que si M appartient à un cercle de centre B et de rayon 1 alors M' appartient à un cercle que l'on précisera.

Exercice 5

Ecrire les complexes suivants sous forme trigonométrique $z_1=1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ où $\alpha\in[0,\pi[$

$z_2=-1+\cos\beta+i\sin\beta$ où $\beta\in]0,\pi[$ $z_3=\sin\theta+i\cos\theta$ $z_4=3-i\sqrt{3}$ $z_5=2\sqrt{3}+2i$

Exercice 6

Soient les points M_1 et M_2 d'affixes respectives $z_1=e^{i\theta}$ et $z_2=iz_1$ avec $\theta\in[0,2\pi[$

1) a) Déterminer le module et un argument de $z=z_1-z_2$

b) Déterminer θ pour que z soit un réel

2) Soit le point I d'affixe $1+i$. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles les points I, M_1 et M_2 soient alignés.

Exercice 7

On donne les points A, B et C d'affixes respectives : $z_A=-1+4i$, $z_B=2+2i$ et $z_C=-i$

1) a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que $ABCD$ soit un carré.

2) Soit le point E d'affixe $z_E=1+i\sqrt{3}$.

a) Donner le module et un argument des complexes z_B et z_E.

b) Déduire le module et un argument de z_Bz_E.

c) Ecrire sous forme algébrique le complexe : z_Bz_E.

d) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12}$ et $\sin\frac{7\pi}{12}$

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z+i|=|z|$.

Exercice 8

1) On donne $z_1=1+i$, $z_2=1-i\sqrt{3}$ et $z_3=1-i$.

a) Ecrire z_1 , z_2 et z_3 sous la forme trigonométrique.

b) En déduire la forme trigonométrique de $Z=\frac{{z_1}^2\times{z_2}^2}{{z_3}^3}$

2) a) Ecrire Z sous forme algébrique.

b) En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$

Exercice 9

Soient les nombres complexes $a=1+i$, $b=-\sqrt{3}-i$ et $=\frac{b}{a}$.

1) a) Donner la forme exponentielle de a et b.

b) Déduire que $c=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]$.

c) Ecrire c sous la forme algébrique puis déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

d) Montrer que $\frac{a-\overline{b}}{b-\overline{b}} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) i$ et en déduire la nature du triangle CAB.

e) Déterminer l'affixe du point D pour que $ACBD$ soit un rectangle.

Exercice 10

1) Ecrire sous la forme algébrique $\frac{-11-2i}{1+2i}$ et $3i\left(-ie^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{6}$

2) a) Placer les points $A(-3+4i)$ et $B(3)$

b) Trouver l'affixe du point I milieu de $[AB]$

c) Soit C le point d'affixe $2-i$. Montrer que ABC est un triangle rectangle en C

d) En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle ζ dont on déterminera

e) Déterminer l'ensemble $E = \{M(z) / |z-2i| = \sqrt{13}\}$

Exercice 11

Soient les points $(2i)$, $M(z)$ et $M'(z')$ tel que $z' = \frac{2iz-5}{z-2i}$

1) On pose $= x+iy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

a) Montrer que $Im(z) = \frac{2x^2+2y^2+y-10}{x^2+(y-2)^2}$

b) Déterminer alors l'ensemble des points $M(z)$ tel que z' soit un réel.

2) Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tel que $|2\overline{z}+4i| = 6$.

3) a) Montrer que $(z'-2i)(z-2i) = -9$

b) Montrer que $AM' \times AM = 9$

c) Montrer que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right) = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire l'ensemble Δ des point $M(z)$ tel que $\arg(z'-2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 12

1) Soit $Z = \frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$; écrire Z sous la forme exponentielle.

2) Ecrire Z sous forme algébrique et en déduire $\tan\frac{\pi}{12}$

Exercice 13

Soient les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2 = -\sqrt{2}-i\sqrt{2}$

1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

2) Placer alors les points A, B et C d'affixes respectives 2, z_1 et z_2

3) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point $I = A * B$

4) Calculer OI et une mesure de $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OI}}\right)$

5) Donner alors z_1 sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

Exercice 14

Soient les points A et B d'affixes r… $2i$ et $z_B = 2+2i$

1) Placer les points A et B.

2) Qu'elle est la nature du triangle OAB.

3) Soit le point C d'affixe $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(2-2i)$.

a) Ecrire z_C sous forme algébrique.

b) Ecrire $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $2-2i$ sous forme trigonométrique.

4) a) Ecrire z_C sous forme trigonométrique.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

5) a) Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OC}}\right)$.

b) En déduire la nature du triangle OAC.

6) On pose $z = x + iy$ déterminer (de deux manières) et construire l'ensemble Δ des points $M(z)$ tel que : $|-i\bar{z} - 2 + 2i| = |z - 2 + 2i|$

7) On pose $z = 2 + 2i\cos\theta$, $\theta \in [0\,,\pi]$. Qu'elle est l'ensemble des points M lorsque θ décrit $[0\,,\pi]$.

Exercice 14

Soient les points A et B d'affixes respectives $a = 2 + 2i\sqrt{3}$ et $b = ia$.

1) Justifier que les points A et B appartiennent à un même cercle que l'on précisera.

2) a) Ecrire a et b sous la forme exponentielle.

b) Placer les points A et B.

c) Montrer que triangle OAB est isocèle en O.

3) Soit le point M d'affixe $z = a + b$

a) Montrer que $OAMB$ est un carré.

b) Déterminer le module et un argument de z.

c) Ecrire z sous la forme algébrique puis déduire que $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

Exercice 15

Soient les points A, B et I d'affixes respectives : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}+2}{2}\right)i$.

1) a) Mettre z_A et z_B sous la forme exponentielle

b) Justifier que les points A et B appartiennent au cercle (C) de centre O et de rayon 2.

c) Vérifier que le point I est le milieu du segment $[AB]$.

d) Placer les points A , B et I.

2) a) Justifier que la demi-droite $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

b) Vérifier que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$.

c) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\ [2\pi]$.

d) En déduire que $z_I = \sqrt{2+\sqrt{3}}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

e) Déterminer les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

Exercice 16

On considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0\,,2\pi[$, M le point d'affixe $1+e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i\left(1+e^{i\theta}\right)$.

1) a) Calculer $Aff\left(\overrightarrow{EM}\right)$ et $Aff\left(\overrightarrow{FN}\right)$.

   b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0\,,2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2

   c) Montrer les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

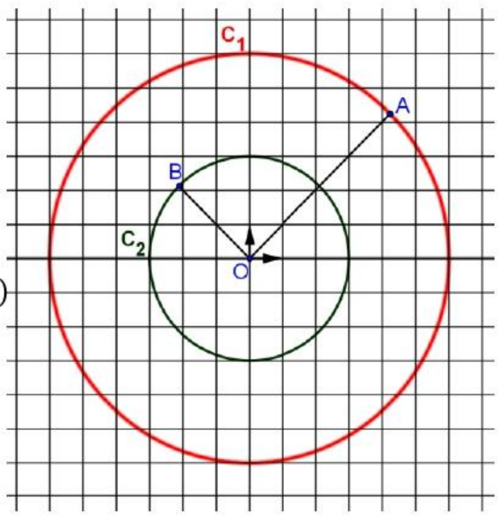
2) Soit P le point d'affixe z_P, tel que $z_P=(1-i)\sin\theta\times e^{i\theta}$.

   a) Montrer que $\frac{Aff\left(\overrightarrow{EP}\right)}{Aff\left(\overrightarrow{EM}\right)}=\sin\theta-\cos\theta$ et calculer $\frac{Aff\left(\overrightarrow{FP}\right)}{Aff\left(\overrightarrow{FN}\right)}$

   b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 17

Dans la figure ci-contre on a construit un cercle C_1 de centre O et de rayon 6 et un cercle C_2 de centre O de rayon 3 ; le point $A\in C_1$ et le point $B\in C_2$.



1) Soient z_A et z_B les affixes respectives des point A et B.

   a) Donner le module et un argument de z_A et z_B.

   b) En déduire que $z_A=3\sqrt{2}(1+i)$ et que $z_B=\frac{3\sqrt{2}}{2}(-1+i)$

2) a) Placer le point C d'affixe $z_C=3i\sqrt{2}$

   b) Montrer que $\frac{z_C-z_B}{z_A}$ est un réel.

   c) Calculer $\frac{z_B}{z_A}$

3) En déduire que le quadrilatère $OACB$ est un trapèze rectangle.

Exercice 18

Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives

$z_A=1+i$, $z_B=\sqrt{3}-i$, $z_C=\left(\sqrt{3}+1\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)$ et $z_D=1+i\sqrt{3}$

1) Ecreire z_A , z_B et z_D sous la forme exponentielle

2) a) Verifier que $z_A\times z_C=2z_D$

   b) En déduire la forme exponentielle de z_C

   c) Déterminer alors les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3) a) Montrer que le triangle OBD est isocèle en O

   b) Montrer que le quadrilatère $OBCD$ est un losange

Exercice 19

1) Ecrire sous la forme algébrique $\frac{-11-2i}{\ldots}$ et $3i\left(-ie^{i\frac{\pi}{12}}\right)^6$

2) a) placer les points $A(-3+4i)$ et $B(3)$

b) Trouver l'affixe du point I milieu de $[AB]$

c) Soit C le point d'affixe $2-i$. Montrer que ABC est un triangle rectangle en C

d) En déduire que les points A, B et C appartiennent à un même cercle ζ dont on déterminera

e) Déterminer l'ensemble $E=\{M(z)/|z-2i|=\sqrt{13}\}$

3) Soit M le point d'affixe $z=1+2i+e^{i\theta}$; $\theta\in[0,2\pi[$

Déterminer l'ensemble des point M, lorsque θ décrit $[0,2\pi[$

Exercice 20

On donne les points A et B d'affixes respectives $z_1=1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1-i$

1) Ecrire z_1 et z_2 sous la forme exponentielle

2) Ecrire z_1z_2 sous la forme exponentielle et en déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

3) A tout point $M\in P\backslash\{B\}$ et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z'=\frac{z-z_1}{z-z_2}$

a) Déterminer et construire l'ensemble E des points M tel que z' soit imaginaire pur

b) Déterminer et construire l'ensemble F des points M tel que z' soit réel

c) Déterminer l'ensemble G des points M tel que $|z'|=1$

4) Soit I le point d'affixe 1. Montrer que pour tout point $\in P\backslash\{B\}$, $IM'\times BM=1+\sqrt{3}$

Que décrit le point M' lorsque M décrit le cercle de centre B et de rayon 1

Exercice 21

Soient les points A, B et C d'affixes respectives $a=1$: $b=i$ et $c=1+i$

A tout pont M d'affixe $z\neq 1$ on associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{iz}{z-1}$

1) Placer les points A, B et C puis montrer que $OACB$ est un carré.

2) Mettre c sous la forme exponentielle et calculer c^{2024}

3) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, c^n est-il un réel ?

4) Déterminer puis construire les ensembles suivants

$E_1=\{M(z)\in P \text{ tel que } |z'|=1\}$ $\quad$ $E_2=\{M(z)\in P \text{ tel que } z' \text{ soit un réel}\}$

5) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z\neq 1$ on a : $z'-i=\frac{i}{z-1}$

b) En déduire que $BM'\times AM=1$

c) Que décrit le point M' lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon 1

6) a) Déterminer l'ensemble $E_3=\{M(z)\in P \text{ tel que } (z-1)(\overline{z}-1)=4\}$

b) Montrer que si M appartient à E_3 alors M' appartient à un cercle (C) que l'on précisera

7) On pose $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in]0,\pi[$

a) Montrer $\forall\theta\in]0,\pi[$ on a $e^{i\theta}-1=2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$

b) En déduire le module et un argument de z'.