Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Exercice 4

1) Soit la fonction f définie sur $]-4, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ soit C_f sa courbe représentative

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) a) Etudier la position relative de C_f et la droite $\Delta : y = x$

b) Tracer C_f ; $C_{f^{-1}}$ et Δ

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$

b) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en 1, interpréter le résultat graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$

b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $f\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) = x$

c) En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$

3) a) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} - x}$

b) Montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$ on a : $\sqrt{x^2 - 1} = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right)$

c) En déduire l'expression de $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$

4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [1, +\infty[$

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

c) Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(\cos^2 x)$

1) Vérifier que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \frac{-2}{1+\sin x}$

2) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-2, -1]$

3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[-2, -1]$.

b) Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$ on a : $(g^{-1})' = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = (n+n^2)\left[g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right) - g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right)\right]$

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_n \in \left]-2+\frac{1}{n+1}, -2+\frac{1}{n}\right[$ tel que $U_n = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(1+\alpha_n)}}$

b) En déduire la limite de la suite U.

Cliquer ci-dessous pour la version PDF de la série

Fonctions réciproques 4ème Sc Expérimentales

👇👇👇👇👇👇👇👇👇👇

Fonctions réciproques 4ème Sc Expérimentales

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-2\,,0[$

b)

Méthode algébrique

On pose $\forall x \in]-\infty\,,1]$ et $\forall X \in [-2\,,0[, f^{-1}(x) = X \Leftrightarrow f(X) = x$

si $x \to -2^+$; $X \to 1^-$

$f(1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = 1$

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{f^{-1}(x)-f^{-1}(-2)}{x+2} = \lim_{X\to 1^-} \frac{X-1}{f(X)-f(1)} = \lim_{X\to 1^-} \underbrace{\frac{1}{\frac{f(X)-f(1)}{X-1}}}_{\to -\infty} = 0 \in \mathbb{R}$$

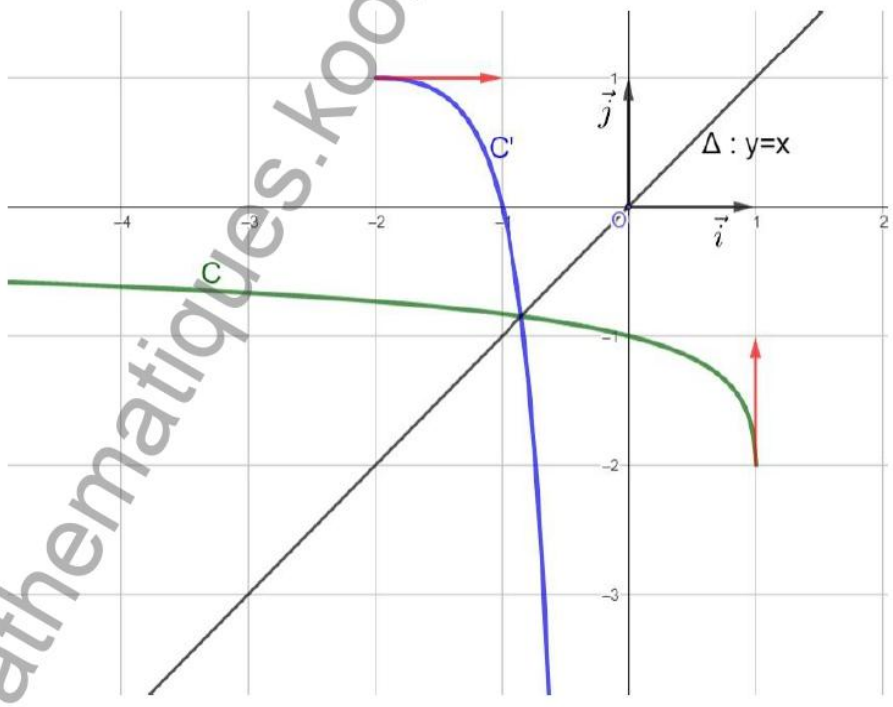
donc f est dérivable à gauche en -2

Méthode graphique

La courbe de f admet à gauche en 1 une demi tangente verticale, pour raison de symétrie avec la droite $\Delta: y = x$ la courbe de f^{-1} admet à droite en $f(1) = -2$ une demi tangente horizontale alors f est dérivable à droite en -2

c) Soit C la courbe de f et C' celle de f^{-1}

$C' = S_\Delta(C)$ avec $\Delta: y = x$



II) $g(x) = f(\cos^2 x)$; $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$

1) Pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$$g(x) = f(\cos^2 x) = \frac{-2}{1+\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-2}{1+\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{-2}{1+|\sin x|} = \frac{-2}{1+\sin x} \quad \text{car } x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right] \quad \text{ainsi } g(x) = \frac{-2}{1+\sin x}$$

2) Pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ on a :

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

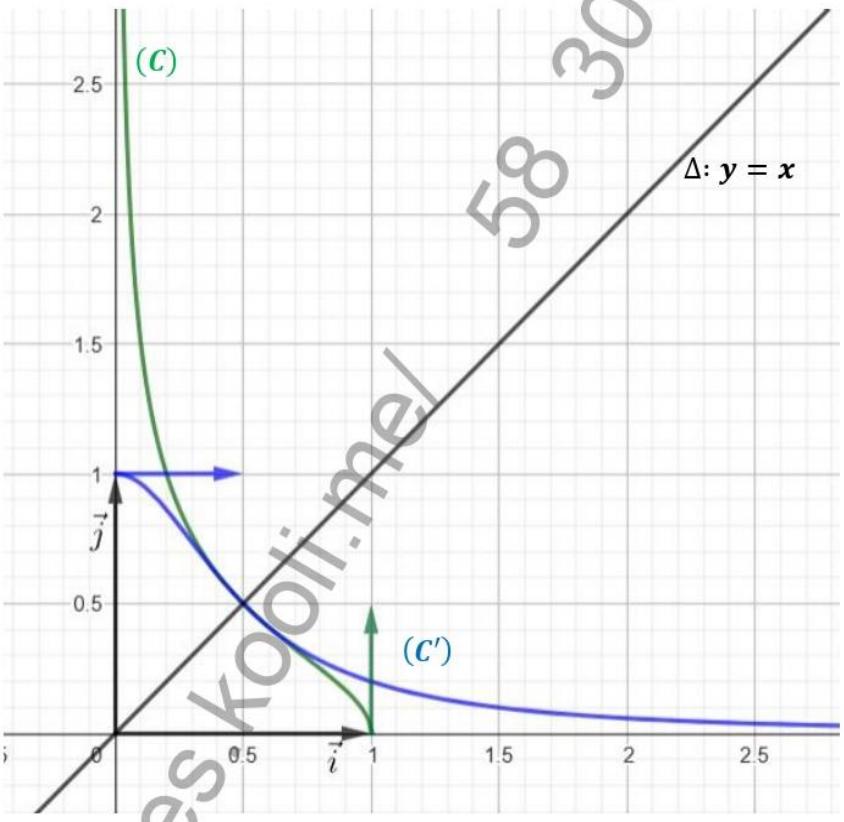
2) a) f est continue et strictement décroissante sur $]0\,,1]$ donc réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur

$J = f(]0\,,1]) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right[= [0\,,+\infty[$

b) f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur $[0\,,+\infty[$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0\,,+\infty[$

c) $(C') = S_{\Delta}((C))$ avec $\Delta: y = x$



3) $g(x) = f(\cos^2 x)$; $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

a) Pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$: g(x) = f(\cos^2 x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2 x - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{\tan^2 x} = \frac{1}{2}|\tan x| = \frac{1}{2}\tan x$$

car $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan x \geq 0$

ainsi pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$.

b) Soit h la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = g(x) - x$

Pour montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 il suffit de montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α autre que 0

$x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ donc g est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ ainsi h est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$; $h'(x) = (g(x) - x)' = g'(x) - 1 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tan^2 x - 1$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\tan^2 x - 1) = \frac{1}{2}(\tan x + 1)(\tan x - 1)$$

http://mathematiques kooli.mel 58 300 174

$\Leftrightarrow f(x)-x$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$

$\Leftrightarrow f(x)=x$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$

$g(1)=f(1)-1=\frac{2}{\sqrt{2}}-1\simeq 0,41$; $g(2)=f(2)-2=\frac{2}{\sqrt{3}}-2\simeq -0,84$

on a $g(1)\times g(2)<0$ donc $1<\alpha<2$.

2) On a : $C_{f^{-1}}=S_{\Delta}(C_f)$ avec $\Delta: y=x$

$f'(0)=-1$ et $f(0)=2$

$T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$ donc $T: y=-x+2$

voir traçage de C_f et $C_{f^{-1}}$ en fin de correction.

3) Pour tout $x\in[1,2]$ on a : $f'(x)=\frac{-1}{(\sqrt{1+x})^3}$ $\Rightarrow$ $|f'(x)|=\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3}$

On a : $1\le x\le 2$ $\Rightarrow$ $2\le 1+x\le 3$ $\Rightarrow$ $\sqrt{2}\le\sqrt{1+x}\le\sqrt{3}$ $\Rightarrow$

$2\sqrt{2}\le(\sqrt{1+x})^3\le 3\sqrt{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{3\sqrt{3}}\le\frac{1}{(\sqrt{1+x})^3}\le\frac{1}{2\sqrt{2}}$ $\Rightarrow$ $|f'(x)|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}$

ainsi pour tout $x\in[1,2]$ on a : $|f'(x)|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}$

4) On a : $\begin{cases}U_0=1\\U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$

a) Pour $n=0$ on a : $U_0=1$; $1\le U_0\le 2$ vrai

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $1\le U_n\le 2$ et montrons que $1\le U_{n+1}\le 2$

On a : $1\le U_n\le 2$ et f est décroissante sur $[0,+\infty[$ donc $f(2)\le f(U_n)\le f(1)$ $\Rightarrow$

$1<\frac{2}{\sqrt{3}}\le U_{n+1}\le\frac{2}{\sqrt{2}}<2$ $\Rightarrow$ $1\le U_{n+1}\le 2$

Conclusion pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $1\le U_n\le 2$

b) On a : f est dérivable sur $[1,2]$

$|f'(x)|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}$; $\forall x\in[1,2]$ donc d'après le corollaire du théorème des

$\alpha\in[1,2]$ et $U_n\in[1,2]$

inégalités des accroissements finis, on a : $|f(U_n)-f(\alpha)|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n-\alpha|$

ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n-\alpha|$

c) Pour $n=0$ on a : $|U_0-\alpha|=|1-\alpha|\le 1=\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^0$ car $1\in[1,2]$ et $\alpha\in[1,2]$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ et montrons que $|U_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}$

On a $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ donc $\frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n-\alpha|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$

ainsi $\frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}$ et comme $|U_{n+1}-\alpha|\le\frac{1}{2\sqrt{2}}|U_n-\alpha|$ alors $|U_{n+1}-\alpha|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}$

conclusion pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$

d) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $|U_n-\alpha|\le\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n$ et $\lim\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n=0$ donc $\lim_{x\to+\infty}U_n=0$

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

On a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n) \Leftrightarrow L = g^{-1}(L) \Leftrightarrow L = \alpha$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n}\left[g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)\right]$; $n \in \mathbb{N}$

$S_n = g^{-1}\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)} - g^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) + g^{-1}\cancel{\left(\frac{2}{2}\right)} - g^{-1}\cancel{\left(\frac{1}{2}\right)} + g^{-1}\cancel{\left(\frac{3}{2}\right)} - g^{-1}\cancel{\left(\frac{2}{2}\right)} + \cdots + g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) - g^{-1}\cancel{\left(\frac{n}{2}\right)}$

$= -g^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ainsi $S_n = g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 15

I) $f(x) = \frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$; $x \in]-\infty, 1]$

1) $\lim\limits_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{\frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{(x-1)(1+\sqrt{1-x})}$

$= \lim\limits_{x\to1^-} \frac{-2\sqrt{1-x}}{(1-x)(1+\sqrt{1-x})} = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{-2\sqrt{1-x}}{(\sqrt{1-x})^2(1+\sqrt{1-x})}$

$= \lim\limits_{x\to1^-} \frac{-2}{\underbrace{(1-x)}_{0^+}\underbrace{(1+\sqrt{1-x})}_{1}} = -\infty$

alors f n'est pas dérivable à gauche en 1 et la courbe représentative de f admet à gauche en 1 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

2) a) Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a :

$f'(x) = -2\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{(1+\sqrt{1-x})^2}\right) = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})^2}\right) = -\frac{4}{4\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x})^2}$

$= -\frac{1}{4\sqrt{1-x}} \times \frac{4}{(1+\sqrt{1-x})^2} = -\frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2 = -\frac{1}{4\sqrt{1-x}} \times f^2(x) = -\frac{f^2(x)}{4\sqrt{1-x}}$ ainsi $f'(x) = -\frac{f^2(x)}{4\sqrt{1-x}}$

b) Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a : $f'(x) = -\frac{f^2(x)}{4\sqrt{1-x}} < 0$

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	‖
$f(x)$	0	↘	-2

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{\underbrace{1+\sqrt{1-x}}_{+\infty}} = 0$ $\quad f(1) = -2$

c) Voir traçage de la courbe représentative à la fin de la correction de la partie I

3) a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ donc f réalise une bijection de $]-\infty, 1]$ sur $f(]-\infty, 1]) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-2, 0[$ ainsi f admet

http://mathematiques.kooli.net 58 300 114

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

$g'(x) = \frac{-2(-\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2} \geq 0$ car $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \geq 0$

$g'(x) = 0$; $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$

ainsi g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On a g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[g(0), g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-2, -1]$

car $g(0) = f(\cos^2 0) = f(1) = -2$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\cos^2 \frac{\pi}{2}\right) = f(0) = -1$

3) a) On a : g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) \neq 0$

donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [-2, -1[$

b) pour $x \in [-2, -1[$ et $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

pour tout $x \in [-2, -1[$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{2\cos y}{(1+\sin y)^2}} = \frac{(1+\sin y)^2}{2\cos y}$

$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{-2}{1+\sin y} = x \Leftrightarrow \frac{1+\sin y}{-2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \sin y = -\frac{2}{x}$ et $\sin y = -\frac{2+x}{x}$

on a $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$; $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos y = \sqrt{1 - \left(\frac{2+x}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2 - 4 - 4x - x^2}{x^2}} = \frac{2\sqrt{-(x+1)}}{|x|} = -\frac{2\sqrt{-(x+1)}}{x}$ car $x < 0$

par la suite pour tout $x \in [-2, -1[$ on a : $(g^{-1})'(x) = -\frac{\frac{4}{x^2}}{\frac{4\sqrt{-(x+1)}}{x}} = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$ ainsi $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$

4) a) on a : $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -2 < -2 + \frac{1}{n} \leq -1$ donc $-2 + \frac{1}{n} \in [-2, -1]$

et $n + 1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2 < -2 + \frac{1}{n+1} \leq -\frac{3}{2}$ donc $-2 + \frac{1}{n+1} \in [-2, -1]$

$n + 1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow -2 + \frac{1}{n+1} < -2 + \frac{1}{n}$

on a g^{-1} est continue sur $\left[-2 + \frac{1}{n+1}, -2 + \frac{1}{n}\right]$ dérivable sur $\left]-2 + \frac{1}{n+1}, -2 + \frac{1}{n}\right[$ alors il existe un réel

$\alpha_n \in \left]-2 + \frac{1}{n+1}, -2 + \frac{1}{n}\right[$ tel que $\frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right) - g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{-2+\frac{1}{n+1} - \left(-2+\frac{1}{n}\right)} = (g^{-1})'(\alpha_n)$

or $\frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right) - g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{-2+\frac{1}{n+1} - 2+\frac{1}{n}} = \frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right) - g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}} = \frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right) - g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{-1}{n+n^2}}$

$= (n + n^2)\left(g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n}\right) - g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n+1}\right)\right)$

$= U_n$

d'autre part $(g^{-1})'(\alpha_n) = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}$

ainsi $U_n = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}$

b) on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}$

http://mathematiques.kooli.net/ 58 300 174

donc $h'(x)$ prend le singe de $\tan x - 1$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ car $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\tan x \geq 0 \Rightarrow \tan x + 1 > 0$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$ ainsi $x = \frac{\pi}{4}$

$x \mapsto \tan x$ est croissante sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

** Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \tan x - 1 \leq 0$ ainsi $h'(x) \leq 0$

** Si $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ on a : $\tan x \geq 1 \Rightarrow \tan x - 1 \geq 0$ ainsi $h'(x) \geq 0$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		α		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$-$	0	$+$			
$h(x)$	0	↘	$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$	↗	0	↗	$+\infty$

$h(0) = g(0) = \frac{1}{2}\tan(0) = 0$ $\quad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \simeq -0,29$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} g(x) - x = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{2}\tan x - x = +\infty$

**on a h est continue et strictement décroissante sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ donc h réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $h\left(\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{4}\right), h(0)\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, 0\right]$ or $0 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, 0\right]$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution or $h(0) = 0$ ainsi 0 est l'unique solution $h(x) = 0$ dans $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$

**on a h est continue et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ donc h réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ sur $h\left(\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{4}\right), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x)\right[= \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\,, +\infty\right[$ or $0 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\,, +\infty\right[$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique α dans $\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ et comme $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \simeq -0,18 < 0$ et $h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ alors $h(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans $\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{3}\right]$ ainsi $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$

<u>Conclusion :</u> $h(x) = 0$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$

c) On a pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$; $g(x) - x = h(x)$ donc $g(x) - x$ prend le signe de $h(x)$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

Or d'après le tableau de variations de h :

** $h(x) \leq 0$ si $x \in [0\,,\alpha]$ donc $g(x) - x \leq 0$

** $h(x) \geq 0$ si $x \in \left[\alpha\,,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $g(x) - x \geq 0$

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$g(x) - x$		$-$	0	$+$	
position relative de Δ et (C_g)		(C_g) au dessous de Δ		(C_g) au dessus de Δ	
Intersection	$(0,0)$		$(\alpha\,,\alpha)$		

http://mathematiquesskooli.me/ 58 300 174

4) a) On a pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$ et $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ainsi g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) = \left(\frac{1}{2}\tan x\right)' = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) > 0$

g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur

$g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[g(0), \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}}\right[= [0, +\infty[$ ainsi g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [0, +\infty[$

b) On pose $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$; $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow g(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan y = \sqrt{3}$ donc $y = -\frac{2\pi}{3}$ ou $y = \frac{\pi}{3}$ or $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc $y = \frac{\pi}{3}$ ainsi $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)} = \frac{1}{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \frac{2}{1+(\sqrt{3})^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ainsi $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[$ et

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)}$$

or $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan y = x \Leftrightarrow \tan y = 2x$ ainsi

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(2x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}[1 + (2x)^2]} = \frac{2}{4x^2 + 1}$$ ainsi $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2 + 1}$

5) $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Pour $n = 0$ on a $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_0 \leq \alpha$

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$ et montrons que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_{n+1} \leq \alpha$

On a g est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc g^{-1} est croissante sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha \Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq g(U_n) \leq g(\alpha) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{3} \leq U_{n+1} \leq \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_{n+1} \leq \alpha$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) On a d'après 3) c) la courbe de (C_g) de g est au dessous de Δ pour tout $x \in [0, \alpha]$ et comme (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à Δ donc $(C_{g^{-1}})$ est au dessus de Δ ainsi pour tout $x \in [0, \alpha]$ $g^{-1}(x) > x$, or $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$ donc $g^{-1}(U_n) > U_n$ ainsi $U_{n+1} > U_n$ alors la suite (U_n) est croissante.

b) La suite (U_n) est croissante et majorée par α donc la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel L

on a g^{-1} est continue sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha\right]$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$ donc $L \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha\right]$ ainsi g^{-1} est continue en L

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 474

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $]0\,,1]$ par : $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et pour tout $x\in]0,1[$ on a : $f'(x)=\frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1}et déterminer son domaine de définition.

c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=f(cos^2x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x\in\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x)=\frac{1}{2}\tan x$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha\in\left[\frac{\pi}{3}\,,\frac{\pi}{2}\right[$.

c) Etudier la position relative de la droite Δ: $y=x$ et la courbe (C_g).

4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x\in J$ on a : $(g^{-1})'(x)=\frac{2}{4x^2+1}$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $U_{n+1}=g^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2}\leq U_n\leq\alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n=\sum_{k=0}^{n}\left[g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right)-g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)\right]$; $n\in\mathbb{N}$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\frac{\pi}{2}$

Exercice 15

I) Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,,1]$ par : $f(x)=\frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que pour tout $x\in]-\infty\,,1[$ on a : $f'(x)=-\frac{[f(x)]^2}{4\sqrt{1-x}}$

b) Dresser le tableau de variation de .

c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$.

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-2\,,0[$

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -2.

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

Exercice 4

1) $f(x)=\dfrac{2x+3}{x+4}$; $x\in\,]-4,+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to-4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to-4^+}\dfrac{\overbrace{2x+3}^{-5}}{\underbrace{x+4}_{0^+}}=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+3}{x+4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$

La droite d'équation $x=4$ est une asymptote verticale à C_f à droite en 4

La droite d'équation $y=2$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$

b) f est dérivable sur $]-4,+\infty[$ et pour tout $x\in\,]-4,+\infty[$ on a :

$$f'(x)=\left(\frac{2x+3}{x+4}\right)'=\frac{2(x+4)-(2x+3)}{(x+4)^2}=\frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2}=\frac{5}{(x+4)^2}>0$$

x	-4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ‖	↗	2

2) a) f est continue et strictement croissante sur $]-4,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-4,+\infty[$ sur $J=f(]-4,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to-4^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+2[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty,+2[$.

b) On pose $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)=y$; $(y\in\mathbb{R})\ \Leftrightarrow\ f(y)=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow\dfrac{2y+3}{y+4}=-\dfrac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ 4y+6=-y-4$

donc $5y=-10$ donc $y=-2$ **ainsi** $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-2$

$$(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)}=\frac{1}{f'(-2)}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}$$

ainsi $(f^{-1})'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{4}{5}$

c) On pose $f^{-1}(x)=y\ \ (x\in\mathbb{R})\ \Leftrightarrow\ f(y)=x\ \ (y\in\,]-4,+\infty[\,)$

$f(y)=x\ \Leftrightarrow\dfrac{2y+3}{y+4}=x\ \Leftrightarrow\ 2y+3=yx+4x\ \Leftrightarrow\ 2y-yx=4x-3\ \Leftrightarrow\ y(2-x)=4x-3\Leftrightarrow$

$y=\dfrac{4x-3}{2-x}$ **ainsi** $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ f^{-1}(x)=\dfrac{4x-3}{2-x}$

3) a) Pour tout $x\in\,]-4,+\infty[$; on a :

$$f(x)-x=\frac{2x+3}{x+4}-x=\frac{2x+3}{x+4}-\frac{-x^2-4x}{x+4}=\frac{-x^2-2x+3}{x+4}$$

donc $f(x)-x$ prend le signe de $-x^2-2x+3$ sur $]-4,+\infty[$ $(x>-4\Rightarrow x+4>0)$

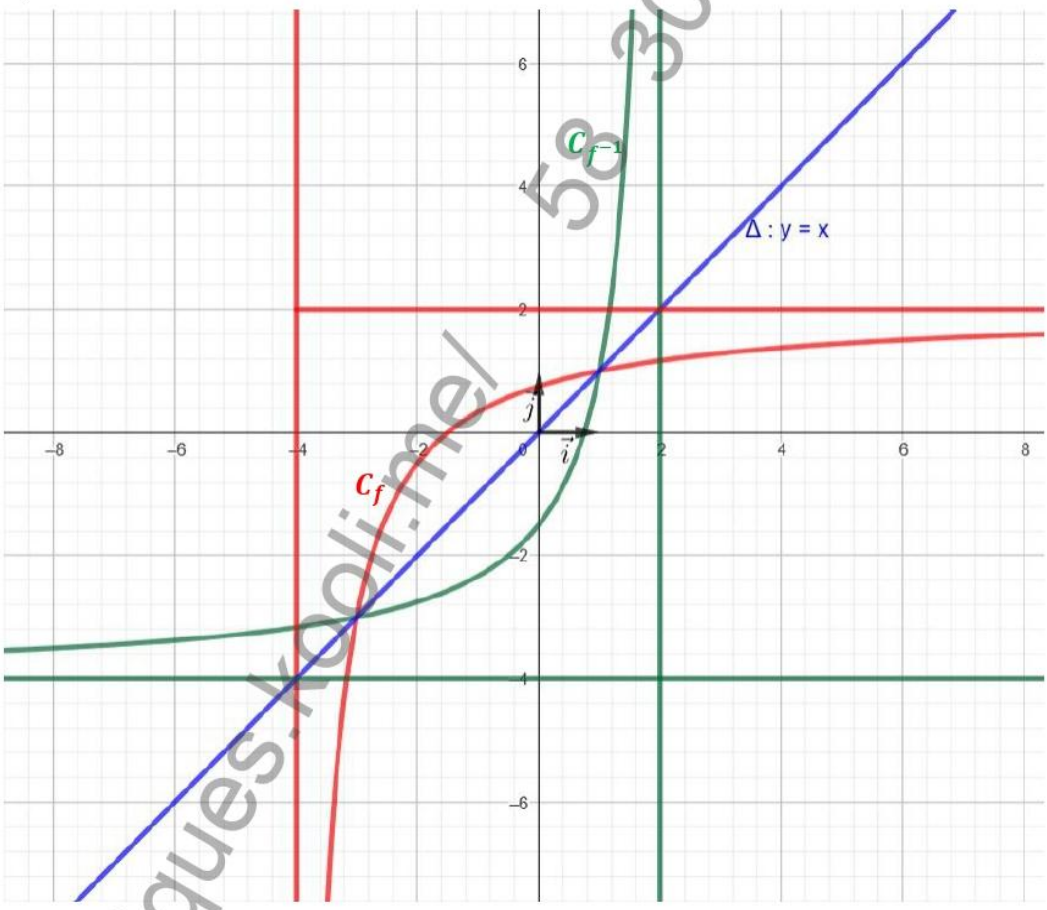
$f(x)-x=0\ \Leftrightarrow\ -x^2-2x+3=0\ \ x=1$ ou $x=-3$

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

x	-4		-3		1	$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$
position de C_f et Δ	‖ C_f au dessous de Δ		C_f au dessus de Δ		C_f au dessous de Δ	
Intersection			$(-3,-3)$		$(1,1)$	

b) $C_{f^{-1}} = S_{\Delta}(C_f)$ avec $\Delta: y = x$



4) $U_0 = -1$; $U_{n+1} = f(U_n)$; $n \in \mathbb{N}$

a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = -1$; $-1 \leq U_0 \leq 1$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $-1 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $-1 \leq U_{n+1} \leq 1$

on a $-1 \leq U_n \leq 1$ et f est continue et croissante sur $[-1\,,1]$ donc

$f(-1) \leq f(U_n) \leq f(1) \Rightarrow -1 < \frac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq U_{n+1} \leq 1$

conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq U_n \leq 1$

b) On a pour tout $x \in [-3\,,1]$ d'après 3) a) $f(x) - x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq x$

or $-1 \leq U_n \leq 1$ donc $f(U_n) \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} > U_n$

ainsi la suite (U_n) est croissante.

c) La suite (U_n) est croissante et majorée par 1 donc la suite (U_n) est convergente

on a : f est continue sur $[-1\,,1]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$; $L \in [-1\,,1]$ donc f est continue en L

http://mathematiques.kooli.mel/ 58 300 174

$-2+\frac{1}{n+1}<\alpha_n<-2+\frac{1}{n} \quad \Rightarrow \quad 2-\frac{1}{n}<-\alpha_n<2-\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{n}<-\alpha_n-1<1-\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{n}<-(\alpha_n+1)<1-\frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$\sqrt{1-\frac{1}{n}}<\sqrt{-(\alpha_n+1)}<\sqrt{1-\frac{1}{n+1}} \Rightarrow$

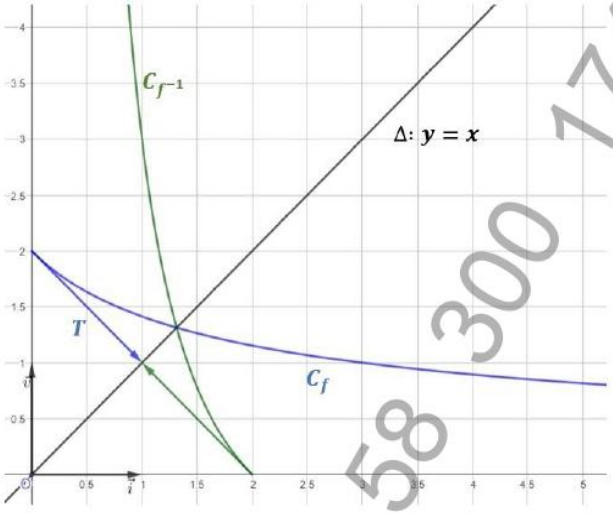
$\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}<-\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}<\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}$ car $-\alpha_n>0 \Rightarrow$

$\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}}<\frac{1}{-\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}<\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \Rightarrow \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}}<\frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}<\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \Rightarrow$

$\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}}<U_n<\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}}=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}U_n=\frac{1}{2}$

http://mathematiques.kooli.me/ 58 900 174



58 300 174

Exercice 13

$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$; $x \in]0, 1]$

1) a) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{x}\right)}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-(x-1)}{2x(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-1}{2x\underbrace{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}_{0^+}} = -\infty$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et (C) admet à gauche en 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

b) $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ **est dérivable et strictement positif sur** $]0, 1[$ $\left[0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0\right]$

$x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ **est dérivable sur** $]0, 1[$

ainsi f est dérivable sur $]0, 1[$

pour tout $x \in]0, 1[$ **on a :** $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}\right) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) pour tout $x \in]0, 1[$ **on a :** $f'(x) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} < 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1} = +\infty$; $f(1) = 0$

x	0		1
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

http://mathematiques.kooli.me/

c) f est pas dérivable sur $]1,+\infty[$ et pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \left(\sqrt{x^2-1}+x\right)' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} + 1 > 0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-1}+x = +\infty$$

2) a) f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = \left[f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [1,+\infty[$

b) Pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a :

$$f\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) = \sqrt{\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)^2 - 1} + \frac{x^2+1}{2x} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2} - 1} + \frac{x^2+1}{2x} = \sqrt{\frac{x^4+2x^2+1}{4x^2} - \frac{4x^2}{4x^2}} + \frac{x^2+1}{2x}$$

$$= \sqrt{\frac{x^4-2x^2+1}{4x^2}} + \frac{x^2+1}{2x} = \sqrt{\frac{(x^2-1)^2}{(2x)^2}} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{|x^2-1|}{|2x|} + \frac{x^2+1}{2x}$$

or pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $x^2-1 \geq 0$ et $2x > 0$ donc $\frac{|x^2-1|}{|2x|} = \frac{x^2-1}{2x}$

ainsi pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $f\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) = \frac{x^2-1}{2x} + \frac{x^2+1}{2x} = \frac{2x^2}{2x} = x$

c) Pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $f\left(\frac{x^2+1}{2x}\right) = x$

ainsi pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{x^2+1}{2x}$

3) a) Pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a :

$$f(x) = \sqrt{x^2-1}+x = \frac{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)}{\sqrt{x^2-1}-x} = \frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}-x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}$$

ainsi que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}$

b) Pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a :

$$\frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1}+x - \frac{1}{\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2-1}+x+\sqrt{x^2-1}-x\right) = \sqrt{x^2-1}$$

ainsi pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right)$

c) Pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a :

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right) \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}+x = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right) + x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - \frac{1}{f(x)}\right) + x$$

on pose $f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$

$x \in [1,+\infty[\qquad y \in [1,+\infty[$

http://mathematiques.kooli.net/ 58 300 174

$U_{n+1} = f(U_n)$ donc $L = f(L) \Leftrightarrow L = \frac{2L+3}{L+4} \Leftrightarrow L^2 + 4L = 2L + 3 \Leftrightarrow L^2 + 2L - 3 = 0$

donc $L = 1$ ou $L = -3$ or $L \in [-1, 1]$ donc $L = 1$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

5) $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$; $n \in \mathbb{N}$

a) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} = \frac{\frac{2U_n+3}{U_n+4}-1}{\frac{2U_n+3}{U_n+4}+3} = \frac{\frac{2U_n+3}{U_n+4}-\frac{U_n+4}{U_n+4}}{\frac{2U_n+3}{U_n+4}+\frac{3U_n+12}{U_n+4}} = \frac{U_n-1}{5U_n+15} = \frac{U_n-1}{5(U_n+3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{U_n-1}{U_n+3}\right) = \frac{1}{5}V_n$

donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+3} = \frac{-2}{2} = -1$

b) La suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et $-< \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} V_k = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = -\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}\right] = -\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}\right] = -\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} V_k = \lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{4}\left[1-\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}_{0}\right] = -\frac{5}{4} \quad \text{ainsi } \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} V_k = -\frac{5}{4}$$

c) $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \Leftrightarrow V_nU_n + 3V_n = U_n - 1 \Leftrightarrow V_nU_n - U_n = -3V_n - 1 \Leftrightarrow U_n(V_n - 1) = -3V_n - 1 \Leftrightarrow$

$U_n = \frac{-3V_n - 1}{V_n - 1}$

or (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de $V_0 = -1$ donc $V_n = V_0 q^n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n$ donc

$$U_n = \frac{3\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{-\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1} \quad \text{donc} \quad \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\overbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^n}^{0} - 1}{\underbrace{-\left(\frac{1}{5}\right)^n}_{0} - 1} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \text{ainsi } \lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

Exercice 5

$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$; $x \in [1, +\infty[$

1) a) $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strictement positive sur $]1, +\infty[$ $(x > 1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0)$

$x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

$x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} + x$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

ainsi f est pas dérivable sur $]1, +\infty[$

b) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)+f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}+x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} + \frac{x-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} + 1$

$= \lim\limits_{x\to1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} + 1 = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}} + 1 = +\infty$

ainsi f n'est pas dérivable à droite en 1 et la courbe de f admet à droite en 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

http://mathematiques.kooli.me/ 58 300 174

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math

$f(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(f(y)-\frac{1}{f(y)}\right)+y=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)+y=x \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{2x}+y=x \Leftrightarrow y=x-\frac{x^2-1}{2x} \Leftrightarrow$

$y=\frac{2x^2}{2x}-\frac{x^2-1}{2x} \Leftrightarrow y=\frac{x^2+1}{2x}$ donc $f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2x}$

ainsi pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2x}$

4) on pose $f^{-1}(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad f(y)=x$

$x \in [1,+\infty[\qquad y \in [1,+\infty[$

$f(y)=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1}+y=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2-1}=x-y \Rightarrow y^2-1=(x-y)^2 \Leftrightarrow y^2-1=x^2-2xy+y^2$

$\Leftrightarrow 2xy-x^2=1 \Leftrightarrow 2xy=x^2+1 \Leftrightarrow y=\frac{x^2+1}{2x}$

ainsi pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $f^{-1}(x)=\frac{x^2+1}{2x}$

Exercice 8

1) a) Pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $1+x>0$ ainsi f est pas dérivable sur $[0,+\infty[$

$f'(x)=\left(\frac{2}{\sqrt{1+x}}\right)'=2\left(\frac{1}{\sqrt{1+x}}\right)'=2\left(\frac{\frac{-1}{2\sqrt{1+x}}}{(\sqrt{1+x})^2}\right)=\frac{-1}{(\sqrt{1+x})^3}<0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	↘	0

$f(0)=2 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+x}}=0$

b) On a f est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $J=f([0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(0)\right]=]0,2]$

c) Posons $f^{-1}(x)=y \quad \Leftrightarrow \quad f(y)=x$

$x \in [2,0[\qquad y \in [0,+\infty[$

$f(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+y}}=x \Leftrightarrow \sqrt{1+y}=\frac{1}{x} \Rightarrow 1+y=\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow y=\frac{1-x^2}{x^2}$

ainsi pour tout $x \in [2,0[$ on a : $f^{-1}(x)=\frac{1-x^2}{x^2}$

d) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $g(x)=f(x)-x$

pour tout $x \in [0,+\infty[$ on a : $g'(x)=(f(x)-x)'=f'(x)-1<0$

on a a g est continue et strictement décroissante sur $[0,+\infty[$ donc g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $g([0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]$

$g(0)=f(0)-0=f(0)=2 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$

ainsi $g([0,+\infty[)=\left]\lim\limits_{x\to+\infty} g(x), g(0)\right]=]-\infty,2]$

or $0 \in]-\infty,2]$ donc $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$

http://mathematiques.kooli.ma/ 58 300 174

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math