Fonctions réciproques $4^{\text{ème}}$ Maths et Sc Exp

Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

1) Soit la fonction f définie sur $]-4, +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$ soit C_f sa courbe représentative

a) Calculer $\lim\limits_{x \to -4^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Interpréter les résultats graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ et $(f^{-1})'\left(-\frac{1}{2}\right)$

c) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

3) a) Etudier la position relative de C_f et la droite $\Delta : y = x$

b) Tracer C_f ; $C_{f^{-1}}$ et Δ

4) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = -1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq U_n \leq 1$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} V_k$

c) Exprimer U_n en fonction de n et retrouver la limite de (U_n).

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $]0, 1]$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ et soit (C) sa courbe représentative.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et pour tout $x \in]0, 1[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x} - 1}}$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer son domaine de définition.

c) Tracer (C) et (C') courbe représentative de f^{-1}.

3) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x) = f(\cos^2 x)$. Soit (C_g) sa courbe représentative.

a) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$.

b) Montrer que l'équation $g(x$ … α autre que 0 et que $\alpha \in \left[\frac{\pi}{3}\right.$ …

b) $x \mapsto \frac{1}{x} - 1$ est dérivable et strictement positif sur $]0,1[$ $\left[0 < x < 1 \Rightarrow \frac{1}{x} > 1 \Rightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0\right]$

$x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}$ est dérivable et strictement positif sur $]0,1[$

ainsi f est dérivable sur $]0,1[$

pour tout $x \in]0,1[$ on a : $f'(x) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}\right) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}}$

c) pour tout $x \in]0,1[$ on a : $f'(x) = \frac{-1}{4x^2\sqrt{\frac{1}{x}-1}} < 0$

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x} - 1} = +\infty$; $f(1) = 0$

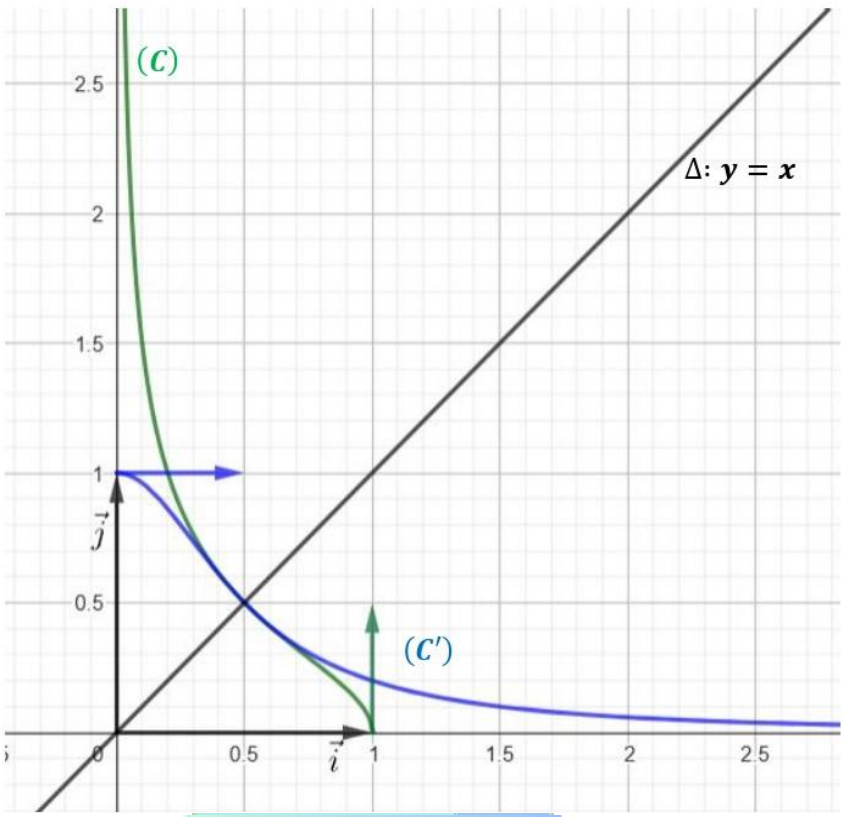
2) a) f est continue et strictement décroissante sur $]0\,,1]$ donc réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur

$J = f(]0\,,1]) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right[= [0\,,+\infty[$

b) f réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur $[0\,,+\infty[$

donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0\,,+\infty[$

c) $(C') = S_\Delta((C))$ avec Δ: $y = x$



$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(2x)} = \frac{1}{\frac{1}{2}[1+(2x)^2]} = \frac{2}{4x^2+1} \quad \text{ainsi } (g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$$

5) $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$; $\forall n \in \mathbb{N}$

a) Pour $n = 0$ on a $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_0 \leq \alpha$

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$ et montrons que $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_{n+1} \leq \alpha$

On a g est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc g^{-1} est croissante sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [0, +\infty[$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha \Rightarrow g\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \leq g(U_n) \leq g(\alpha) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\pi}{3} \leq U_{n+1} \leq \alpha \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_{n+1} \leq \alpha$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) On a d'après **3) c)** la courbe de (C_g) de g est au dessous de Δ pour tout $x \in [0, \alpha]$ et comme (C_g) et $(C_{g^{-1}})$ sont symétriques par rapport à Δ donc $(C_{g^{-1}})$ est au dessus de Δ ainsi pour tout $x \in [0, \alpha]$ $g^{-1}(x) > x$, or $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$ donc $g^{-1}(U_n) > U_n$ ainsi $U_{n+1} > U_n$ alors la suite (U_n) est croissante.

b) La suite (U_n) est croissante et majorée par α donc la suite (U_n) est convergente et converge vers un réel L

on a g^{-1} est continue sur $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha\right]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$ donc $L \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \alpha\right]$ ainsi g^{-1} est continue en L

On a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n) \Leftrightarrow L = g^{-1}(L) \Leftrightarrow L = \alpha$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \alpha$

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n}\left[g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)\right]$; $n \in \mathbb{N}$

$$S_n = \cancel{g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)} - g^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) + \cancel{g^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)} - \cancel{g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)} + \cancel{g^{-1}\left(\frac{3}{2}\right)} - \cancel{g^{-1}\left(\frac{2}{2}\right)} + \cdots + g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) - \cancel{g^{-1}\left(\frac{n}{2}\right)}$$

$$= -g^{-1}\left(\frac{0}{2}\right) + g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) = g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right) \quad \text{ainsi } S_n = g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$$

$\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} g^{-1}\left(\frac{n+1}{2}\right)$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

I) $f(x) = \frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$; $x \in]-\infty, 1]$

1) $$\lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{\frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}+2}{x-1} = \lim_{x\to1^-} \frac{2\sqrt{1-x}}{(x-1)(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{-2\sqrt{1-x}}{(1-x)(1+\sqrt{1-x})} = \lim_{x\to1^-} \frac{-2\sqrt{1-x}}{(\sqrt{1-x})^2(1+\sqrt{1-x})}$$

$$= \lim_{x\to1^-} \frac{-2}{\underbrace{(1-x)}_{0^+}(1+\sqrt{1-x})} = -\infty$$

$h\left(\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{4}\right), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} h(x)\right[= \left[\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$ or $0 \in \left[\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique α dans $\left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[$ et comme $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = g\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} \simeq -0,18 < 0$ et $h\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$ alors $h(x) = 0$ n'admet pas de solutions dans $\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right]$ ainsi $h(x) = 0$ admet une unique solution dans $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

<u>Conclusion :</u> $h(x) = 0$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 et que $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$

c) On a pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $g(x) - x = h(x)$ donc $g(x) - x$ prend le signe de $h(x)$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

Or d'après le tableau de variations de h :

** $h(x) \le 0$ si $x \in [0,\alpha]$ donc $g(x) - x \le 0$

** $h(x) \ge 0$ si $x \in \left[\alpha,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $g(x) - x \ge 0$

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$g(x) - x$		$-$	0	$+$	||
position relative de Δ et (C_g)		(C_g) au dessous de Δ		(C_g) au dessus de Δ	
Intersection	$(0,0)$		(α,α)		

4) a) On a pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$ et $x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ ainsi g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) = \left(\frac{1}{2}\tan x\right)' = \frac{1}{2}(1+\tan^2 x) > 0$

g est continue et strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc g réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur

$g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[g(0), \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\right[= [0,+\infty[$ ainsi g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $J = [0,+\infty[$

b) On pose $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$; $y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow g(y) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\tan y = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \tan y = \sqrt{3}$ donc $y = -\frac{2\pi}{3}$ ou $y = \frac{\pi}{3}$ or $y \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $y = \frac{\pi}{3}$ ainsi $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

$(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)} = \frac{1}{g'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left[1+\tan^2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]} = \frac{2}{1+\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ainsi $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}$

c) g est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = [0,+\infty[$ et

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)}$$

or $y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \frac{1}{2}$ ... ainsi

$U_{n+1} = f(U_n)$ donc $L = f(L) \Leftrightarrow L = \frac{2L+3}{L+4} \Leftrightarrow L^2 + 4L = 2L + 3 \Leftrightarrow L^2 + 2L - 3 = 0$

donc $L = 1$ ou $L = -3$ or $L \in [-1,1]$ donc $L = 1$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$

5) $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}; n \in \mathbb{N}$

a) $V_{n+1} = \frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}+3} = \frac{\frac{2U_n+3}{U_n+4}-1}{\frac{2U_n+3}{U_n+4}+3} = \frac{\frac{2U_n+3}{U_n+4}-\frac{U_n+4}{U_n+4}}{\frac{2U_n+3}{U_n+4}+\frac{3U_n+12}{U_n+4}} = \frac{U_n-1}{5U_n+15} = \frac{U_n-1}{5(U_n+3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{U_n-1}{U_n+3}\right) = \frac{1}{5}V_n$

donc la suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de premier terme $V_0 = \frac{U_0-1}{U_0+3} = \frac{-2}{2} = -1$

b) La suite (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et $- < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$

$$\sum_{k=0}^{n} V_k = V_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right) = -\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{5}}\right] = -\left[\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}\right] = -\frac{5}{4}\left[1-\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} V_k = \lim_{n\to+\infty} -\frac{5}{4}\left[1-\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}_{0}\right] = -\frac{5}{4} \quad \text{ainsi } \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} V_k = -\frac{5}{4}$$

c) $V_n = \dfrac{U_n-1}{U_n+3} \Leftrightarrow V_nU_n + 3V_n = U_n - 1 \Leftrightarrow V_nU_n - U_n = -3V_n - 1 \Leftrightarrow U_n(V_n-1) = -3V_n - 1 \Leftrightarrow$

$U_n = \dfrac{-3V_n-1}{V_n-1}$

or (V_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{5}$ et de $V_0 = -1$ donc $V_n = V_0 q^n = -\left(\frac{1}{5}\right)^n$ donc

$$U_n = \frac{3\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1}{-\left(\frac{1}{5}\right)^n - 1} \quad \text{donc } \lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3\overbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^n}^{0} - 1}{-\underbrace{\left(\frac{1}{5}\right)^n}_{0} - 1} = \frac{-1}{-1} = 1 \quad \text{ainsi } \lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

Exercice 2

$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}\ ; \quad x \in]0,1]$

1) *a)* $$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}-1}}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x}{x}}}{x-1} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \lim_{x\to1^-}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1-x}{x}\right)}{(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}}$$

$$= \lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)}{2x(x-1)\sqrt{\frac{1-x}{x}}} = \lim_{x\to1^-}\frac{-1}{2x\underbrace{\sqrt{\frac{1-x}{x}}}_{0^+}} = -\infty$$

donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 et (C) admet à gauche en 1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut.

c) Etudier la position relative de la droite $\Delta: y = x$ et la courbe (C_g).

4) a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Calculer $g^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(g^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{4x^2+1}$.

5) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq U_n \leq \alpha$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

6) Soit la suite S_n définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[g^{-1}\left(\frac{k+1}{2}\right) - g^{-1}\left(\frac{k}{2}\right)\right]$; $n \in \mathbb{N}$

Montrer que $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}$

Exercice 3

I) Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par : $f(x) = \frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$

1) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a : $f'(x) = -\frac{[f(x)]^2}{4\sqrt{1-x}}$

b) Dresser le tableau de variation de .

c) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-2, 0[$

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en -2.

c) Tracer la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

II) Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = f(\cos^2 x)$

1) Vérifier que pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $g(x) = \frac{-2}{1+\sin x}$

2) Montrer que g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-2, -1]$

3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $[-2, -1]$.

b) Montrer que pour tout $x \in [-2, -1]$ on a : $(g^{-1})' = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$

4) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = (n + n^2)\left[g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n}\right) - g^{-1}\left(-2 + \frac{1}{n+1}\right)\right]$

a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel $\alpha_n \in \left]-2 + \frac{1}{n+1}, -2 + \frac{1}{n}\right[$ tel que

$$U_n = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(1+\alpha_n)}}$$

b) En déduire la limite de la suite U.

Exercice 1

1) $f(x) = \dfrac{2x+3}{x+4}$; $x \in]-4\,,+\infty[$

a) $\lim\limits_{x\to -4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -4^+} \dfrac{\overbrace{2x+3}^{-5}}{\underbrace{x+4}_{0^+}} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+3}{x+4} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x}{x} = 2$

La droite d'équation $x = 4$ est une asymptote verticale à C_f à droite en 4

La droite d'équation $y = 2$ est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de $+\infty$

b) f est dérivable sur $]-4\,,+\infty[$ et pour tout $x \in]-4\,,+\infty[$ on a :

$$f'(x) = \left(\frac{2x+3}{x+4}\right)' = \frac{2(x+4)-(2x+3)}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2} > 0$$

x	-4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

2) a) f est continue et strictement croissante sur $]-4\,,+\infty[$ donc f réalise une bijection de $]-4\,,+\infty[$ sur $J = f(]-4\,,+\infty[) = \left]\lim\limits_{x\to -4^+} f(x)\,, \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right[=]-\infty\,,+2[$ donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $]-\infty\,,+2[$.

b) On pose $f^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right) = y$; $(y \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $f(y) = -\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2y+3}{y+4} = -\dfrac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $4y+6 = -y-4$

donc $5y = -10$ donc $y = -2$ ainsi $f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -2$

$(f^{-1})'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{f'\left(f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{f'(-2)} = \dfrac{1}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}$ ainsi $(f^{-1})'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{4}{5}$

c) On pose $f^{-1}(x) = y$ $(x \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$ $f(y) = x$ $(y \in]-4\,,+\infty[)$

$f(y) = x$ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{2y+3}{y+4} = x$ $\Leftrightarrow$ $2y+3 = yx+4x$ $\Leftrightarrow$ $2y-yx = 4x-3$ $\Leftrightarrow$ $y(2-x) = 4x-3$ $\Leftrightarrow$

$y = \dfrac{4x-3}{2-x}$ ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$; $f^{-1}(x) = \dfrac{4x-3}{2-x}$

3) a) Pour tout $x \in]-4\,,+\infty[$; on a :

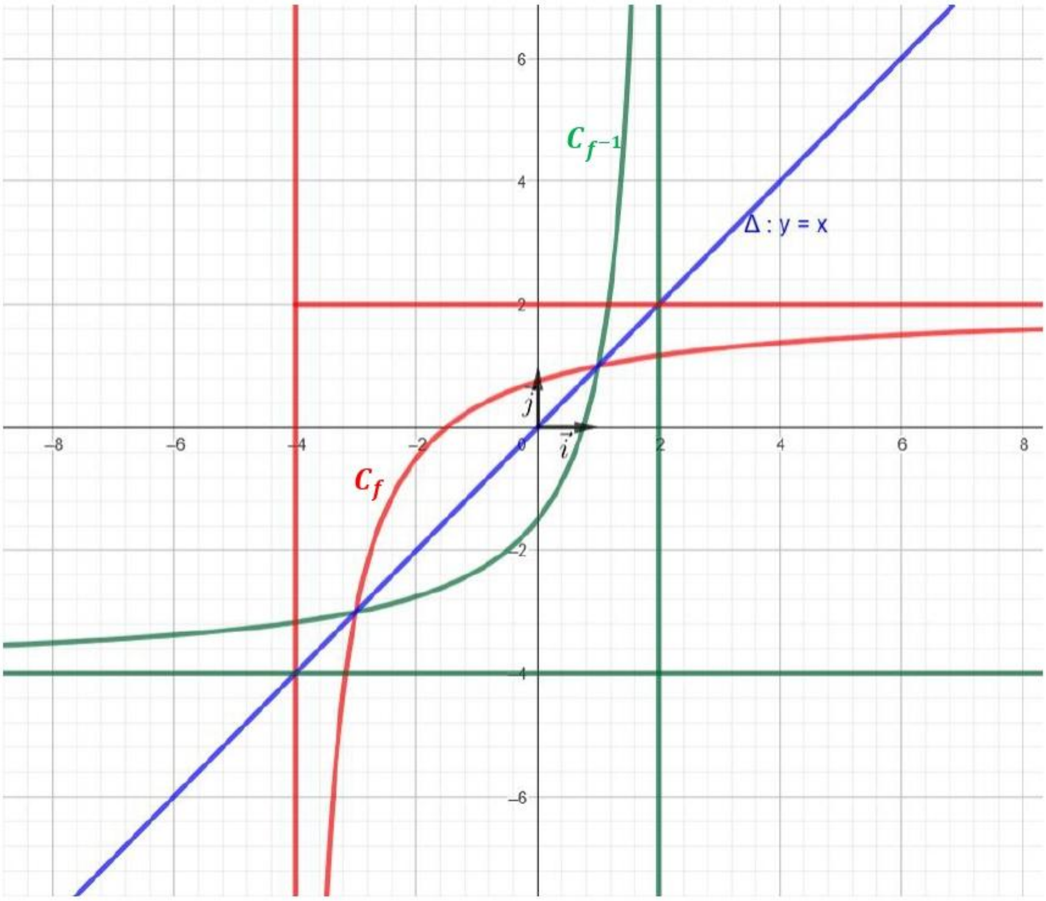
$$f(x) - x = \frac{2x+3}{x+4} - x = \frac{2x+3}{x+4} - \frac{-x^2-4x}{x+4} = \frac{-x^2-2x+3}{x+4}$$

donc $f(x) - x$ prend le signe de $-x^2-2x+3$ sur $]-4\,,+\infty[$ $(x > -4 \Rightarrow x+4 > 0)$

$f(x) - x = 0$ $\Leftrightarrow$ $-x^2-2x+3 = 0$ $x = 1$ ou $x = -3$

x	-4		-3		1		$+\infty$
$f(x)-x$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
position de C_f et Δ	‖	C_f au dessous de Δ		C_f au dessus de Δ		C_f au dessous de Δ	
	Intersection		$(-3,-3)$		$(1,1)$		

b) $C_{f^{-1}} = S_\Delta(C_f)$ avec Δ: $y = x$



4) $U_0 = -1$; $U_{n+1} = f(U_n)$; $n \in \mathbb{N}$

a) Pour $n = 0$ on a : $U_0 = -1$; $-1 \leq U_0 \leq 1$ vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $-1 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $-1 \leq U_{n+1} \leq 1$

on a $-1 \leq U_n \leq 1$ et f est continue et croissante sur $[-1, 1]$ donc

$f(-1) \leq f(U_n) \leq f(1) \Rightarrow -1 < \dfrac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 1 \Rightarrow -1 \leq U_{n+1} \leq 1$

conclusion $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $-1 \leq U_n \leq 1$

b) On a pour tout $x \in [-3, 1]$ d'après 3) a) $f(x) - x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq x$

or $-1 \leq U_n \leq 1$ donc $f(U_n) \geq U_n \Rightarrow U_{n+1} > U_n$

ainsi la suite (U_n) est croissante.

c) La suite (U_n) est croissante et majorée par 1 donc la suite (U_n) est convergente

on a : f est continue sur $[-1, 1]$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = L$; $L \in [-1, 1]$ donc f est continue en L

alors f n'est pas dérivable à gauche en 1 et la courbe représentative de f admet à gauche en 1 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

2) a) Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a :

$$f'(x) = -2\left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2}\right) = -2\left(\frac{1}{2\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2}\right) = -\frac{4}{4\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2}$$

$$= -\frac{1}{4\sqrt{1-x}} \times \frac{4}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2} = -\frac{1}{4\sqrt{1-x}}\left(\frac{2}{1+\sqrt{1-x}}\right)^2 = -\frac{1}{4\sqrt{1-x}} \times f^2(x) = -\frac{f^2(x)}{4\sqrt{1-x}}$$ ainsi $f'(x) == -\frac{f^2(x)}{4\sqrt{1-x}}$

b) Pour tout $x \in]-\infty, 1[$ on a : $f'(x) = -\frac{f^2(x)}{4\sqrt{1-x}} < 0$

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		$-$	‖
$f(x)$	0	$\searrow$	-2

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2}{\underbrace{1+\sqrt{1-x}}_{+\infty}} = 0 \quad f(1) = -2$

c) Voir traçage de la courbe représentative à la fin de la correction de la partie I

3) a) La fonction f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$ donc f réalise une bijection de $]-\infty, 1]$ sur $f(]-\infty, 1]) = \left[f(1), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[= [-2, 0[$ ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-2, 0[$

b)

<u>**Méthode algébrique**</u>

On pose $\forall x \in]-\infty, 1]$ et $\forall X \in [-2, 0[, f^{-1}(x) = X \Leftrightarrow f(X) = x$

si $x \to -2^+$; $X \to 1^-$

$f(1) = -2 \Leftrightarrow f^{-1}(-2) = 1$

$$\lim_{x\to-2^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(-2)}{x+2} = \lim_{X\to1^-} \frac{X-1}{f(X)-f(1)} = \lim_{X\to1^-} \frac{1}{\underbrace{\frac{f(X)-f(1)}{X-1}}_{-\infty}} = 0 \in \mathbb{R}$$

donc f est dérivable à gauche en – 2

<u>**Méthode graphique**</u>

La courbe de f admet à gauche en 1 une demi tangente verticale, pour raison de symétrie avec la droite $\Delta: y = x$ la courbe de f^{-1} admet à droite en $f(1) = -2$ une demi tangente horizontale alors f est dérivable à droite en -2

c) Soit C la courbe de f et C' celle de f^{-1}

$C' = S_\Delta(C)$ avec $\Delta: y = x$

$\cos y = \sqrt{1-\left(\frac{2+x}{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{x^2-4-4x-x^2}{x^2}} = \frac{2\sqrt{-(x+1)}}{|x|} = -\frac{2\sqrt{-(x+1)}}{x}$ car $x<0$

par la suite pour tout $x \in [-2,-1[$ on a : $(g^{-1})'(x) = -\frac{\frac{4}{x^2}}{\frac{4\sqrt{-(x+1)}}{x}} = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$ ainsi $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{-(x+1)}}$

4) a) on a : $n \geq 1 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \Rightarrow -2 < -2+\frac{1}{n} \leq -1$ donc $-2+\frac{1}{n} \in [-2,-1]$

et $n+1 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow -2 < -2+\frac{1}{n+1} \leq -\frac{3}{2}$ donc $-2+\frac{1}{n+1} \in [-2,-1]$

$n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow -2+\frac{1}{n+1} < -2+\frac{1}{n}$

on a g^{-1} est continue sur $\left[-2+\frac{1}{n+1}, -2+\frac{1}{n}\right]$ dérivable sur $\left]-2+\frac{1}{n+1}, -2+\frac{1}{n}\right[$ alors il existe un réel

$\alpha_n \in \left]-2+\frac{1}{n+1}, -2+\frac{1}{n}\right[$ tel que $\frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right)-g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{-2+\frac{1}{n+1}-\left(-2+\frac{1}{n}\right)} = (g^{-1})'(\alpha_n)$

or $\frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right)-g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{-2+\frac{1}{n+1}-2+\frac{1}{n}} = \frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right)-g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}} = \frac{g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right)-g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)}{\frac{-1}{n+n^2}}$

$$= (n+n^2)\left(g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n}\right)-g^{-1}\left(-2+\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$= U_n$$

d'autre part $(g^{-1})'(\alpha_n) = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}$

ainsi $U_n = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}$

b) on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $U_n = \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}}$

$-2+\frac{1}{n+1} < \alpha_n < -2+\frac{1}{n} \Rightarrow 2-\frac{1}{n} < -\alpha_n < 2-\frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{n} < -\alpha_n-1 < 1-\frac{1}{n+1} \Rightarrow 1-\frac{1}{n} < -(\alpha_n+1) < 1-\frac{1}{n+1} \Rightarrow$

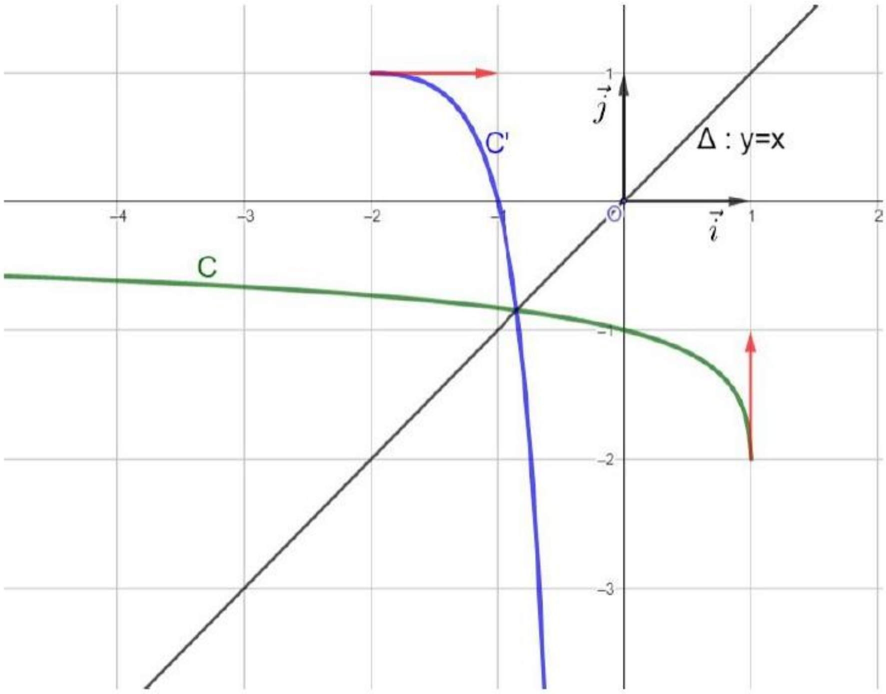
$\sqrt{1-\frac{1}{n}} < \sqrt{-(\alpha_n+1)} < \sqrt{1-\frac{1}{n+1}} \Rightarrow$

$\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}} < -\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)} < \left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}$ car $-\alpha_n > 0 \Rightarrow$

$\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}} < \frac{1}{-\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}} < \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \Rightarrow \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}} < \frac{-1}{\alpha_n\sqrt{-(\alpha_n+1)}} < \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \Rightarrow$

$\frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}} < U_n < \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n+1}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n+1}}} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(2-\frac{1}{n}\right)\sqrt{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{2}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$



II) $g(x) = f(\cos^2 x)$; $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

1) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$g(x) = f(\cos^2 x) = \frac{-2}{1+\sqrt{1-\cos^2 x}} = \frac{-2}{1+\sqrt{\sin^2 x}} = \frac{-2}{1+|\sin x|} = \frac{-2}{1+\sin x}$ car $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ainsi $g(x) = \frac{-2}{1+\sin x}$

2) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a :

$g'(x) = \frac{-2(-\cos x)}{(1+\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1+\sin x)^2} \geq 0$ car $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; $\cos x \geq 0$

$g'(x) = 0$; $\cos x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$

ainsi g est strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

On a g est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

donc g réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[g(0), g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-2, -1]$

car $g(0) = f(\cos^2 0) = f(1) = -2$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\cos^2 \frac{\pi}{2}\right) = f(0) = -1$

3) a) On a : g est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) \neq 0$

donc g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = [-2, -1[$

b) pour $x \in [-2, -1[$ et $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x$

pour tout $x \in [-2, -1[$ on a : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{2\cos y}{(1+\sin y)^2}} = \frac{(1+\sin y)^2}{2\cos y}$

$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{-2}{1+\sin y} = x \Leftrightarrow \frac{1+\sin y}{-2} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow 1 + \sin y = -\frac{2}{x}$ et $\sin y = -\frac{2+x}{x}$

on a $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Leftrightarrow \cos^2 y = 1 - \sin^2 y \Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$; $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$

3) $g(x) = f(cos^2 x)\ ;\ x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

a) Pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$: g(x) = f(cos^2 x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{cos^2 x} - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + \tan^2 x - 1} = \frac{1}{2}\sqrt{\tan^2 x} = \frac{1}{2}|\tan x| = \frac{1}{2}\tan x$$

car $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ donc $\tan x \geq 0$

ainsi pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}\tan x$.

b) Soit h la fonction définie sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = g(x) - x$

Pour montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une unique solution α autre que 0 il suffit de montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α autre que 0

$x \mapsto \tan x$ est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ donc g est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ ainsi h est dérivable sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

pour tout $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$; $h'(x) = (g(x) - x)' = g'(x) - 1 = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 x) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\tan^2 x - 1$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\tan^2 x - 1) = \frac{1}{2}(\tan x + 1)(\tan x - 1)$$

donc $h'(x)$ prend le singe de $\tan x - 1$ sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ car $x \in \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $\tan x \geq 0 \Rightarrow \tan x + 1 > 0$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$ ainsi $x = \frac{\pi}{4}$

$x \mapsto \tan x$ est croissante sur $\left[0\,,\frac{\pi}{2}\right[$

** Si $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow 0 \leq \tan x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \tan x - 1 \leq 0$ ainsi $h'(x) \leq 0$

** Si $\frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$ on a : $\tan x \geq 1 \Rightarrow \tan x - 1 \geq 0$ ainsi $h'(x) \geq 0$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		α		$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		$-$	0		$+$		‖
$h(x)$	0	$\searrow$	$\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

$h(0) = g(0) = \frac{1}{2}\tan(0) = 0 \quad h\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4} \simeq -0,29$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} g(x) - x = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\tan x - x = +\infty$

**on a h est continue et strictement décroissante sur $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ donc h réalise une bijection de $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $h\left(\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{4}\right)\,,h(0)\right] = \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, 0\right]$ or $0 \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}, 0\right]$ donc l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution or $h(0) = 0$ ainsi 0 est l'unique solution $h(x) = 0$ dans $\left[0\,,\frac{\pi}{4}\right]$

**on a h est continue et strictemen … $\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ … réalise une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}\,,\frac{\pi}{2}\right[$ s…