Fonction exponentielle 4ème Mathématiques

A) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x+1}$ et soit C_f sa courbe dans un RON $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que le point $I\left(0, \frac{3}{2}\right)$ est un centre de symétrie de C_f.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

c) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α et que $1 < \alpha < 2$

d) Vérifier que $Ln(1 + e^{-\alpha}) = -[\alpha + Ln(\alpha - 1)]$.

3) Construire C_f et $C_{f^{-1}}$.

4) Soit m un réel strictement supérieure à α et soit $A(m)$ l'aire de la partie du plan limitée par C_f la droite d'équation $y = 1$ et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = m$.

Montrer que $A(m) = -Ln(1 + e^{-m}) - [\alpha + Ln(\alpha - 1)]$ et en déduire $\lim\limits_{m\to+\infty} A(m)$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g(t) = f(t) - 1$ et $I_n = \int_0^\alpha g^n(t)\, dt$.

1) Vérifier que $I_1 = \alpha + Ln[2(\alpha - 1)]$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g'(x) = g^2(x) - g(x)$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left[(\alpha - 1)^n - \frac{1}{2^n}\right]$.

c) En déduire que pour tout $n \geq 2$ on a : $I_n = \alpha + Ln[2(\alpha - 1)] + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha - 1)^k - \frac{1}{2^k}$

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha - 1)^k - \frac{1}{2^k}$

4) Soit $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $g(t) + g^2(t) + \cdots + g^n(t) = e^{-t} - \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}$

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = 1 - e^{-\alpha} - \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}\, dt$

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 \leq \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}\, dt \leq 2I_{n+1}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}\, dt$

d) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Correction Fazzoura 3

A) $f(x) = 1 + \frac{1}{e^x+1}$; $D_f = \mathbb{R}$

1) a) f **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **on a :**

$f'(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	2	$\searrow$	1

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 1 + \frac{1}{\underbrace{e^x}_{0}+1} = 2$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{\underbrace{e^x+1}_{+\infty}} = 1$

b) On a : $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) + f(x) = 1 + \frac{1}{e^{-x}+1} + 1 + \frac{1}{e^x+1} = 2 + \frac{1}{e^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x}(e^x+1)}$

$= 2 + \frac{1}{e^{-x}+1} + \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} = 2 + \frac{1+e^{-x}}{e^{-x}+1} = 3 = 2\left(\frac{3}{2}\right)$

donc le point $I\left(0, \frac{3}{2}\right)$ **est un centre de symétrie de** C_f.

2) a) On f **est continue et strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **donc** f **réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **sur** $J = f(\mathbb{R}) =]1, 2[$ **donc** f **admet une fonction réciproque** f^{-1} **définie sur un intervalle** $]1, 2[$.

b) Posons $f^{-1}(x) = y$ $\quad\Leftrightarrow\quad$ $f(y) = x$

$\quad x \in]1, 2[\qquad\qquad y \in \mathbb{R}$

$f(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{e^y+1} = x \Leftrightarrow \frac{1}{e^y+1} = x - 1 \Leftrightarrow e^y + 1 = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow e^y = \frac{1}{x-1} - 1 \Leftrightarrow$

$e^y = \frac{2-x}{x-1} \Leftrightarrow y = Ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right)$ **ainsi pour tout** $x \in]1, 2[$; $f^{-1}(x) = Ln\left(\frac{2-x}{x-1}\right)$

c) Soit h **la fonction définie sur** $\mathbb{R}$ **par :** $h(x) = f(x) - x$

h **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ **et pour tout** $x \in \mathbb{R}$ **on a :** $h'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

On h **est continue et strictement croissante sur** $\mathbb{R}$ **donc** h **réalise une bijection de** $\mathbb{R}$ **sur**

$h(\mathbb{R}) = \left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$ **or** $0 \in \mathbb{R}$ **donc l'équation** $h(x) = 0$ **admet une unique solution** α **dans** $\mathbb{R}$ **ainsi** $f(x) = x$ **admet une unique solution** α

$h(1) = f(1) - 1 = 1 + \frac{1}{e+1} - 1 = \frac{1}{e+1} \simeq 0,27$;

$h(2) = f(2) - 2 = 1 + \frac{1}{e^2+1} - 2 = -1 + \frac{1}{e^2+1} \simeq -0,88$

$h(1) \times h(2) < 0$ **donc** $1 < \alpha < 2$

$$= -Ln(1+e^{-\alpha}) + ln(2)$$

$$= \alpha + Ln(\alpha - 1) + ln(2) = \alpha + Ln[2(\alpha - 1)] \quad \text{ainsi } I_1 = \alpha + Ln[2(\alpha - 1)].$$

2) a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g^2(x) - g(x) = \left(\frac{1}{e^x+1}\right)^2 - \frac{1}{e^x+1}$$

$$= \frac{1}{(e^x+1)^2} - \frac{e^x+1}{(e^x+1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x+1)^2} = g'(x)$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^\alpha g^{n+1}(t)\ dt - \int_0^\alpha g^n(t)\ dt = \int_0^\alpha \left(g^{n+1}(t) - g^n(t)\right)\ dt$$

$$= \int_0^\alpha g^{n-1}(t)\left(g^2(t) - g(t)\right)\ dt = \int_0^\alpha g^{n-1}(t) g'(t)\ dt \quad \text{de la forme } u' \times u^n$$

$$= \left[\frac{1}{n} g^n(t)\right]_0^\alpha = \frac{1}{n}[g^n(\alpha) - g^n(0)]$$

$$= \frac{1}{n}\left[(f(\alpha) - 1)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{1}{n}\left[(\alpha - 1)^n - \frac{1}{2^n}\right]$$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left[(\alpha-1)^n - \frac{1}{2^n}\right]$

c) Pour tout $n \geq 2$ on a : $I_{n+1} - I_n = \frac{1}{n}\left[(\alpha-1)^n - \frac{1}{2^n}\right]$ donc

$$\cancel{I_2} - I_1 = \frac{1}{1}\left[(\alpha-1)^1 - \frac{1}{2^1}\right]$$

$$\cancel{I_3} - \cancel{I_2} = \frac{1}{2}\left[(\alpha-1)^2 - \frac{1}{2^2}\right]$$

$$\cancel{I_4} - \cancel{I_3} = \frac{1}{n}\left[(\alpha-1)^3 - \frac{1}{2^3}\right]$$

$$I_n - I_{n-1} = \frac{1}{n-1}\left[(\alpha-1)^{n-1} - \frac{1}{2^{n-1}}\right]$$

en additionnant les $n-1$ égalités membre à membre ou trouve :

$$I_n - I_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left[(\alpha-1)^k - \frac{1}{2^k}\right] \quad \text{d'où} \quad I_n = I_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\left[(\alpha-1)^k - \frac{1}{2^k}\right]$$

ainsi pour tout $n \geq 2$ on a $\quad I_n = \alpha + Ln[2(\alpha - 1)] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha-1)^k - \frac{1}{2^k}$

3) a) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = \int_0^\alpha g^n(t)\ dt$

d) On a : $f(\alpha)=\alpha \Leftrightarrow 1+\frac{1}{e^{\alpha}+1}=\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{e^{\alpha}+1}=\alpha-1 \Leftrightarrow \frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}=\alpha-1 \Leftrightarrow Ln\left(\frac{e^{-\alpha}}{1+e^{-\alpha}}\right)=Ln(\alpha-1)$

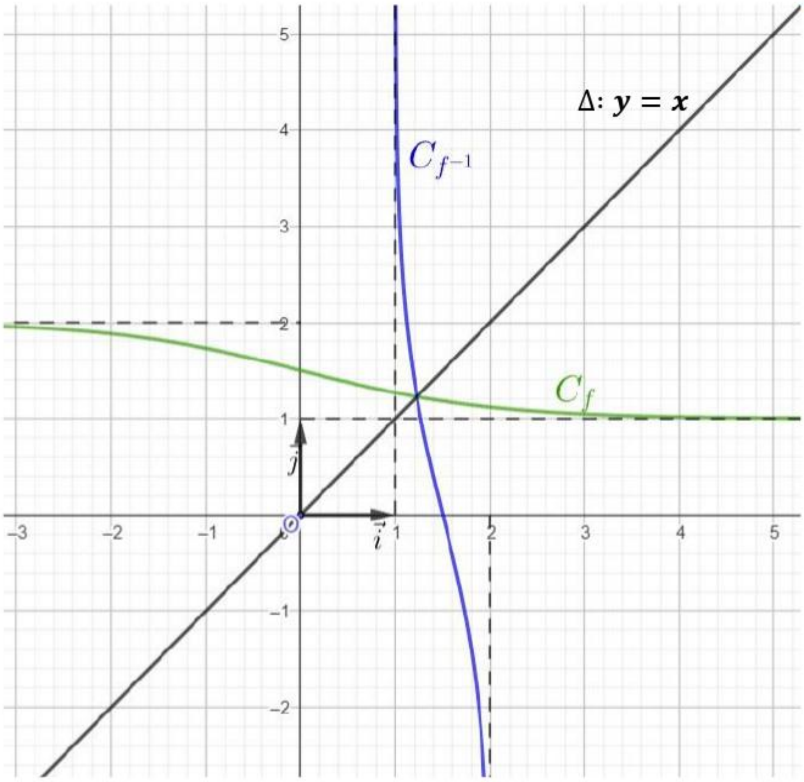
$Ln(e^{-\alpha})-Ln(1+e^{-\alpha})=Ln(\alpha-1) \Leftrightarrow -\alpha-Ln(1+e^{-\alpha})=Ln(\alpha-1)$

donc $Ln(1+e^{-\alpha})=-[\alpha+Ln(\alpha-1)]$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ donc la droite d'équation $y=2$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ donc la droite d'équation $y=1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

$C_{f^{-1}}=S_{\Delta}(C_f)$ avec $\Delta : y=x$



4) $A(m)=\int_{\alpha}^{m}|f(x)-1|\,dx=\int_{\alpha}^{m}(f(x)-1)\,dx \quad car\ \forall x\in\mathbb{R}\ ; f(x)>1$

$$=\int_{\alpha}^{m}\frac{1}{e^{x}+1}\,dx=\int_{\alpha}^{m}\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=-\int_{\alpha}^{m}\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx=-[Ln(1+e^{-x})]_{\alpha}^{m}$$

$$=-\left(Ln(1+e^{-m})-Ln(1+e^{-\alpha})\right)=Ln(1+e^{-m})+Ln(1+e^{-\alpha})$$

$$=-Ln(1+e^{-m})-[\alpha+Ln(\alpha-1)]\ ua$$

$$\lim_{m\to+\infty}A(m)=\lim_{m\to+\infty}-Ln\Big(\overbrace{1+\underbrace{e^{-m}}_{0}}^{1}\Big)-[\alpha+Ln(\alpha-1)]=-[\alpha+Ln(\alpha-1)]$$

B) $g(t)=f(t)-1$; $I_n=\int_0^{\alpha}g^n(t)\,dt$; $n\in\mathbb{N}^*$

1) $I_1=\int_0^{\alpha}g(t)\,dt=\int_0^{\alpha}\frac{1}{e^{t}+1}\,dt=\int_0^{\alpha}\frac{e^{-t}}{e^{-t}(e^{t}+1)}\,dt=\int_0^{\alpha}\frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt=-\int_0^{\alpha}\frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}\,dt$

$$=-[Ln(1+e^{-t})]_0^{\alpha}=-\left(Ln(1+e^{-\alpha})-Ln(1+e^{0})\right)$$

$$= -(e^{-\alpha} - 1) - \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)} = 1 - e^{-\alpha} - \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt$$

ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ S_n = 1 - e^{-\alpha} - \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N}^* : 0 < g(t) < 1 \ \Rightarrow\ -1 < -g(t) < 0$

$\Rightarrow\ 0 < 1 - g(t) < 1 \ \Rightarrow\ 1 - g(t) > 0$

$0 < g(t) < 1 \ \Rightarrow\ 0 < g^{n+1}(t) < 1 \ \Rightarrow\ 0 \leq \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)} \leq 1$ donc $0 \leq \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}$

et $t \mapsto \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}$ est continue sur $[0,\alpha]$ donc $0 \leq \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt$ **(1)**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt - 2I_{n+1} = \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt - 2\int_0^{\alpha} g^{n+1}(t)\, dt == \int_0^{\alpha} \left[\frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)} - 2g^{n+1}(t)\right] dt$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t) - \big(1-g(t)\big)2g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t) - 2g^{n+1}(t) - g(t)g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt$$

$$= \int_0^{\alpha} \frac{-g^{n+1}(t) - g(t)g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt$$

$$= -\int_0^{\alpha} \frac{\big(1+g(t)\big)g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt \ \leq 0$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt \leq 2I_{n+1}$ **(2)**

conclusio $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt \leq 2I_{n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2I_{n+1} = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*; 0 \leq \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt \leq 2I_{n+1}$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt = 0$

d) $\forall n \in \mathbb{N}^*;\ S_n = 1 - e^{-\alpha} - \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\alpha} \frac{g^{n+1}(t)}{1-g(t)}\, dt = 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1 - e^{-\alpha}$

$0 \leq t \leq \alpha$ et g est décroissante sur $[0\,,\ \alpha]$ donc $g(\alpha) \leq g(t) \leq g(0) \Rightarrow \alpha - 1 \leq g(t) \leq \frac{1}{2}$

or $1 < \alpha < 2 \Rightarrow 0 < \alpha - 1 < 1 \Rightarrow 0 < \alpha - 1$ donc $0 \leq g(t) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq g^n(t) \leq \frac{1}{2^n}$

$t \mapsto g^n(t)$ et $t \mapsto \frac{1}{2^n}$ sont continues sur $[0, \alpha]$ donc

$$0 \leq \int_0^\alpha g^n(t)\, dt \leq \int_0^\alpha \frac{1}{2^n}\, dt \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}\int_0^\alpha dt \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n}[t]_0^\alpha \Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$

b) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq I_n \leq \frac{\alpha}{2^n}$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\alpha}{2^n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

pour tout $n \geq 2$ on a : $I_n = \alpha + Ln[2(\alpha - 1)] + \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha - 1)^k - \frac{1}{2^k}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

$$\text{donc } \lim_{n\to+\infty} \left(\alpha + Ln[2(\alpha - 1)] + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha - 1)^k - \frac{1}{2^k}\right) = 0$$

$$\text{ainsi } \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(\alpha - 1)^k - \frac{1}{2^k} = -(\alpha + Ln[2(\alpha - 1)])$$

4) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k$; $n \in \mathbb{N}^*$

a) On a pour tout $t \in \mathbb{R}$; $g(t) \neq 1$ ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$g(t) + g^2(t) + \cdots + g^n(t)$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de premier terme $g(t)$ et de raison $g(t)$ donc :

$$g(t) + g^2(t) + \cdots + g^n(t) = g(t)\left(\frac{1 - g^n(t)}{1 - g(t)}\right) = \frac{g(t) - g^{n+1}(t)}{1 - g(t)} = \frac{g(t)}{1 - g(t)} - \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}$$

$$\text{or } \frac{g(t)}{1 - g(t)} = \frac{\frac{1}{e^t + 1}}{1 - \frac{1}{e^t + 1}} = \frac{\frac{1}{e^t + 1}}{\frac{e^t}{e^t + 1}} = \frac{1}{e^t + 1} \times \frac{e^t + 1}{e^t} = \frac{1}{e^t} = e^{-t}$$

ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $g(t) + g^2(t) + \cdots g^n(t) = e^{-t} - \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}$

b) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} I_k = I_1 = I_2 + \cdots + I_n = \int_0^\alpha g(t)\, dt + \int_0^\alpha g^2(t)\, dt + \cdots + \int_0^\alpha g^n(t)\, dt$

$$= \int_0^\alpha \left(g(t) + g^2(t) + \cdots + g^n(t)\right) dt = \int_0^\alpha \left(e^{-t} - \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}\right) dt$$

$$= \int_0^\alpha e^{-t}\, dt - \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}\, dt = -[e^{-t}]_0^\alpha - \int_0^\alpha \frac{g^{n+1}(t)}{1 - g(t)}\, dt$$