Enoncé 1

On donne le point $I(-1\,,3\,,0)$ et les plans $P_1: 2x - y + z + 5 = 0$ et $P_2: x - 2z + 1 = 0$

1) a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

b) Montrer que la droite $D = P_1 \cap P_2$ passe I et dont un vecteur directeur est $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$

c) Montrer que le plan P, perpendiculaire à D et passant par le point $A(2\,,0\,,-1)$, a pour équation cartésienne : $2x + 5y + z - 3 = 0$

2) a) Déterminer par ces coordonnées le point H commun à D et P

b) Calculer de deux manières la distance $d(A; D)$

3) Soit $S = \{M(x\,,y\,,z) \in C \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0\}$

a) Montrer que S est une sphère de centre le point I et dont on déterminera le rayon R

b) Montrer que $S \cap P$ est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

c) Déterminer par leurs coordonnées les points communs à S et D

4) Déterminer par leurs équations cartésiennes les plans parallèles à P et tangents à S.

Enoncé 2

On considère les points $AA(-1\,,1\,,3)$, $B(2\,,1\,,0)$ et $C(2\,,-1\,,2)$

1) a) Montrer que les ponts A, B et C ne sont pas alignés.

b) On note P le plan (ABC) . Montrer qu'une équation cartésienne de P est $x + y + z - 3 = 0$

2) a) Soit Q le plan médiateur du segment $[AB]$.

Montrer qu'une équation cartésienne de Q et $x - z + 1 = 0$

b) On note D la droite d'intersection de P et Q. Trouver une représentation paramétrique de D

3) Soit $S = \{M(x\,,y\,,z) \in C \text{ tel que } MB^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC} = 0\}$

a) Vérifier que $M(x\,,y\,,z) \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$

b) En déduire que S est une sphère de centre $I(2\,,0\,,1)$ et de rayon $R = \sqrt{2}$

c) Montrer que le plan Q est tangent à S en un point H dont on déterminera les coordonnées

4) Soit m un réel on considère l'ensemble S_m tel que :

$$S_m = \{M(x\,,y\,,z) \in C \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2my - 2(m+3)z + 5m - 10 = 0\}$$

a) Montrer que S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m\,,m\,,m+3)$

b) Déterminer R_m le rayon de S_m

c) Que décrit le point Ω_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$?

d) Discuter selon m la position relative de S_m et P.

Exercice 1

On donne le point $I(-1\,,3\,,0)$ et les plans $P_1: 2x-y+z+5=0$ et $P_2: x-2z+1=0$

1) a) Soient $\overrightarrow{N_{P_1}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P_1 et $\overrightarrow{N_{P_2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ un vecteur normal de P_2

On a : $\overrightarrow{N_{P_1}}.\overrightarrow{N_{P_2}} = 2\times1+(-1\times0)+1(-2)=2-2=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{N_{P_1}}\perp\overrightarrow{N_{P_2}}$ donc les plans P_1 et P_2 sont perpendiculaires.

b) On a $2(-1)-3+0+5=-5+5=0$ donc $I\in P_1$

on a : $-1-2\times0+1=-1+1=0$ donc $I\in P_2$ ainsi $I\in P_1\cap P_2$

donc la droite $D=P_1\cap P_2$ passe $I(-1\,,3\,,0)$

on a $\vec{u}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$

on a $2\times2-5+1=0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur de P_1

on a $2-2\times1=0$ donc $\vec{u}$ est un vecteur de P_2

or $D=P_1\cap P_2$ donc $\vec{u}=2\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k}$ est un vecteur directeur de D

c) On a P est perpendiculaire à D et $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D donc $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P ainsi $P: 2x+5y+z+d=0\,;\,d\in\mathbb{R}$

or $A(2\,,0\,,-1)\in P$ donc : $2\times2+5\times0-1+d=0$ donc $d=-3$

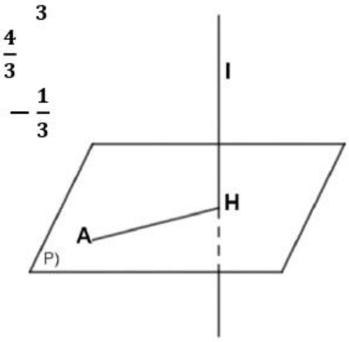
ainsi $P: 2x+5y+z-3=0$

2) a) On a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\5\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $I(-1\,,3\,,0)\in D$

donc $D: \begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=3+5\alpha\\z=\alpha\end{cases}\quad \alpha\in\mathbb{R}$

32on a $H(x\,,y\,,z)\in D\cap P \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=3+5\alpha\\z=\alpha\\2x+5y+z-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=3+5\alpha\\z=\alpha\\2(-1+2\alpha)+5(3+5\alpha)+\alpha-3=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=3+5\alpha\\z=\alpha\\-2+4\alpha+15+25\alpha+\alpha-3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=3+5\alpha\\z=\alpha\\30\alpha+10=0\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=-\frac{5}{3}\\z=\frac{4}{3}\\\alpha=-\frac{1}{3}\end{cases}$



ainsi $H\left(-\frac{5}{3}\,,\frac{4}{3}\,,-\frac{1}{3}\right)$

b)

** <u>méthode 1</u> on a : $D\perp P$ en H et $A\in P$ donc $(AH)\perp D$

or $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix}-\frac{11}{3}\\\frac{4}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $AH=\sqrt{\left(-\frac{11}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{33}{2}}$ ainsi $d(A;D)=\sqrt{\frac{33}{2}}$

ainsi $d(A;D) = AH = \|\overrightarrow{AH}\|$

or $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

** <u>méthode 2</u> on a :

on a $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $H \in D$ ainsi $d(A;D) = \frac{\|\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

or $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -4 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ \frac{1}{2} & 5 \end{vmatrix}\vec{k} = -\frac{1}{2}\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} - 21\vec{k}$

$\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 5 \\ -21 \end{pmatrix}$: $\|\overrightarrow{AH} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{\frac{1}{4} + 25 + 441} = \sqrt{\frac{1}{4} + 466} = \frac{\sqrt{1865}}{2}$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{4 + 58 + 1} = \sqrt{63}$

3) a) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 6 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + y^2 - 6y + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + z^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 10 > 0$$

donc S est une sphère de centre le point I et de rayon $R = \sqrt{10}$

b) On a : $d(I,P) = IH$ or $\overrightarrow{IH}\left(-1, -\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ donc $IH = \sqrt{1 + \frac{25}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{2}$

ainsi $d(I,P) = \frac{\sqrt{30}}{2}$

montrer que $S \cap P$ est un cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2

On a les points $A(-1, 1, 3)$, $B(2, 1, 0)$ et $C(2, -1, 2)$

1) a) On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$;

On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}\vec{k}$ ainsi $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont colinéaires donc les ponts A, B et C ne sont pas alignés.

b) On a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normale de P

$P : -6x - 6y - 6z + d = 0$ or $A(-1, 1, 3) \in P$ donc $6 - 6 - 18 + d = 0$ donc $d = 18$

ainsi $P : -6x - 6y - 6z + 18 = 0$ d'où $P : x + y + z - 3 = 0$

4) a) On a : $M(x\,,y\,,z) \in S_m \iff x^2+y^2+z^2-2mx-2my-2(m+3)z+5m-10=0$

$\iff x^2-2mx+y^2-2my+z^2-2(m+3)z+5m-10=0$

$\iff (x-m)^2-m^2+(y-m)^2-m^2+\big(z-(m+3)\big)^2-(m+3)^2+5m-10=0$

$\iff (x-m)^2+(y-m)^2+\big(z-(m+3)\big)^2=(m+3)^2+2m^2-5m+10$

$\iff (x-m)^2+(y-m)^2+\big(z-(m+3)\big)^2=m^2+6m+9+2m^2-5m+10$

$\iff (x-m)^2+(y-m)^2+\big(z-(m+3)\big)^2=3m^2+m+19$

Soit $3m^2+m+19=0$ $\quad \Delta=1-228=-227<0$ donc $\forall m \in \mathbb{R}$ on a $3m^2+m+19>0$

donc S_m est une sphère de centre $\Omega_m(m\,,m\,,m+3)$

b) On a : $R_m=\sqrt{3m^2+m+19}$

c) On a : $\Omega_m(m\,,m\,,m+3)$, posons $\Omega_m(x\,,y\,,z)$ donc $\begin{cases} x=m \\ y=m \\ z=3+m \end{cases} \quad m\in\mathbb{R}$

ainsi Ω_m décrit la droite passant par le point $N(0\,,0\,,3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

d) On a : $d(\Omega_m\,,P)=\frac{|m+m+3+m-3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{|3m|}{\sqrt{3}}=\frac{3|m|}{\sqrt{3}}=|m|\sqrt{3}$

on a $\big(d(\Omega_m\,,P)\big)^2-(R_m)^2=\big(|m|\sqrt{3}\big)^2-\sqrt{3m^2+m+19}^{\,2}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad =3m^2-3m^2-m-19=-m-19$

m	$-\infty$ $\qquad$	-19	$\qquad$ $+\infty$
$\big(d(\Omega_m\,,P)\big)^2-(R_m)^2$	$+$	0	$-$
Position de S_m et P	$S_m \cap P=\emptyset$	P tangent à S_m	P coupe S_m selon un cercle

2) a) On a Q le plan médiateur du segment $[AB]$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q

d'où $Q : 3x - 3z + d = 0$; soit J le milieu du segment $[AB]$ donc $J \in Q$

$x_J = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$; $y_J = \frac{2}{2} = 1$; $z_J = \frac{3}{2}$ ainsi $J\left(\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{3}{2}\right)$

donc $: \frac{3}{2} - \frac{9}{2} + d = 0$; $d = 3$ ainsi $Q : 3x - 3z + 3 = 0$ d'où $Q : x - z + 1 = 0$

b) On a $M(x,y,z) \in D = P \cap Q \Leftrightarrow \begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 1 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = z - 1 \\ z - 1 + y + z - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 1 = 0 \\ 2z + y - 4 = 0 \end{cases}$ posons $y = \alpha \in \mathbb{R}$

$\begin{cases} x = z - 1 = 0 \\ y = \alpha \\ 2z + \alpha - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z - 1 = 0 \\ y = \alpha \\ z = 2 - \frac{\alpha}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ y = \alpha \\ z = 2 - \frac{\alpha}{2} \end{cases}$ ainsi $D : \begin{cases} x = 1 - \frac{\alpha}{2} \\ y = \alpha \\ z = 2 - \frac{\alpha}{2} \end{cases}$; $\alpha \in \mathbb{R}$

3) a) on a $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow MB^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{MB}.\left(\overrightarrow{MB} +. \overrightarrow{BC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0$

b) on a $M(x,y,z) \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MC}$ donc $M(x,y,z)$ apparient au cercle de diamètre $[BC]$, soit $K = B * C$

$x_K = \frac{2+2}{2} = 2$

$y_K = \frac{1-1}{2} = 0$

$z_K = \frac{0+2}{2} = 1$ donc $K(2,0,1)$ ainsi $K = I$

donc S est la sphère de centre $I(2,0,1)$ et de rayon $R = IB$

or $\overrightarrow{IB}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $IB = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ donc $R = \sqrt{2}$

c) On a : $d(I;Q) = \frac{|2-1+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R$

ainsi Q est tangent à S en un point $H(x,y,z)$; donc H est le projeté orthogonale de I sur Q

donc $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de Q

soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ un un vecteur normal de Q donc $\overrightarrow{IH}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ sont collinaires donc il existe un réel β

tel que $\overrightarrow{IH} = \beta\vec{u}$ donc $\begin{cases} x - 2 = \beta \\ y = 0 \\ z - 1 = -\beta \end{cases}$ et on a $H(x,y,z) \in Q$ donc $x - z + 1 = 0$

ainsi $\begin{cases} x - 2 = \beta \\ y = 0 \\ z - 1 = -\beta \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = 0 \\ z = 1 - \beta \\ x - z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = 0 \\ z = 1 - \beta \\ 2 + 2\beta - 1 + \beta + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \beta \\ y = 0 \\ z = 1 - \beta \\ \beta = -1 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ ainsi $H(1,0,2)$