<u>***Dérivabilité 4ème Sc Informatiques***</u>

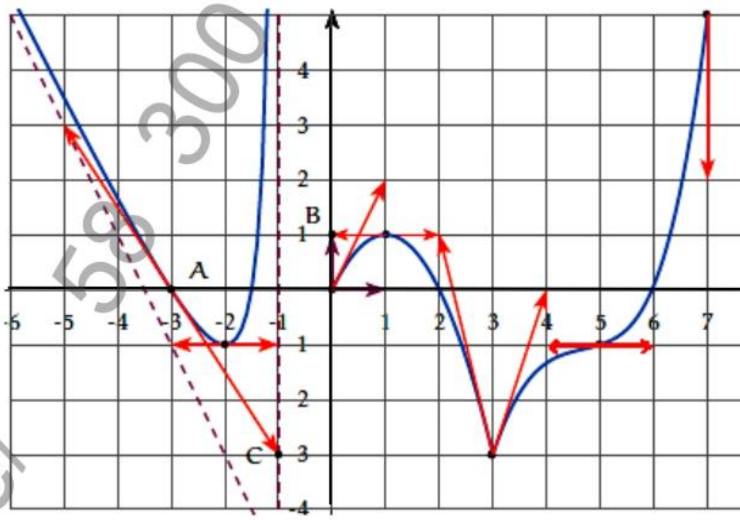
Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

On a tracé ci-contre, C_f la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty, -1[\cup [0, 7]$

La droite $\Delta : y = -2x - 7$

est une asymptote à C_f au voisinage $(-\infty)$.



1) a) Déterminer par lecture graphique

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{f(x)}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + 2x$

$f'(-3)$; $f'(-2)$; $f'(1)$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{f(x)+3}{x-3}$

$\lim\limits_{x\to3^-} \frac{f(x)+3}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to7^-} \frac{f(x)-5}{x-7}$

b) La fonction f est-elle dérivable en 3 ?

c) Déterminer le point d'inflexion de C_f et déduire $f''(5)$

2) Ecrire une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse (-3).

3) Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels f est dérivable.

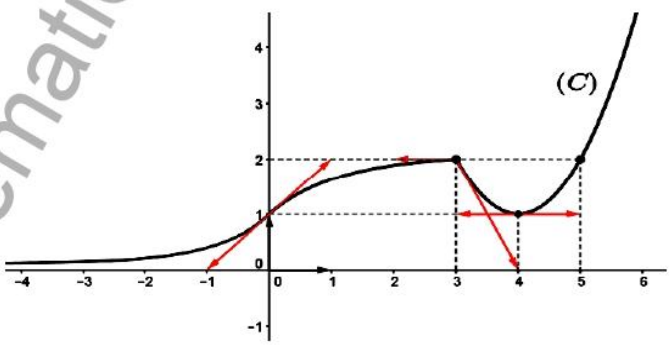
4) Dresser le tableau de variation de f.

Exercice 2

Dans la figure ci-dessous, C_f est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

L'axe des abscisses est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

C_f admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



1) Déterminer : $f'(0)$, $f'(4)$, $\lim\limits_{x\to3^-} \frac{f(x)-2}{x-3}$ et $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{f(x)-2}{x-3}$

2) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I de C_f .

3) Déterminer: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f \circ f(x)}{x}$

5) Dresser le tableau de variation de f.

6) Soit g la restriction de f sur l'

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty\,,3]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g est-elle dérivable a gauche en 2 ? Justifier votre réponse.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en 1 puis calculer $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} - 1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - x - 1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

1) Etudier la continuité de g en 1.

2) a) Etudier la dérivabilité de g à gauche en 1.

b) Déterminer une équation de la demi-tangente à (C_g) au point d'abscisse 1.

3) a) Etudier la dérivabilité de g à droite en 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

c) La fonction g est-elle dérivable en 1 ? justifier.

4) Montrer que g est dérivable sur $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$ puis calculer $g'(x)$.

5) a) Montrer que g réalise une bijection de $[1\,,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en -1

c) Soit g^{-1} la fonction réciproque de g. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$

Exercice 4

A) Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = 2x^2 - 3x - 4 & si\ \ x \leq -1 \\ f(x) = \frac{x^2-x+4}{x^2+1} & si\ \ x > -1 \end{cases}$

1) Déterminer les limites suivantes $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) La fonction f est-elle continue en -1 ?

3) a) Montrer que f est décroissante sur $]-\infty\,,1]$

b) Déduire que f réalise one bijection de $]-\infty\,,1]$sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-2\,,-1[$

B) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = x\left(2 - \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) & \text{si } \ x > 0 \\ g(x) = 1 + x - \sqrt{x^2+1} & si\ \ x \leq 0 \end{cases}$

On note C_f sa courbe représentative.

1) a) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $x \leq g(x) \leq 3x$

b) En déduire que g est continue à droite de 0.

2) Montrer que g est continue en 0.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $[-1\,,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{2}}$

1) **a)** Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1.

b) Montrer que $\forall x \in]-1\,,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{1}{4f(x)}$ et en déduire le sens de variation de f.

c) Montrer que $\forall x[0\,,1]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{2}|U_n - 1|$.

c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_n - 1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et en déduire la limite de suite U.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,,5[$ par $f(x) = \frac{4}{5-x}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) **a)** Dresser le tableau de variation de f

b) Etudier la position relative de $\Delta : y = x$ et C_f

c) Tracer C_f et Δ

3) Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $1 \leq U_n \leq 4$

b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans le plan munie d'un repère orthonormé $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

1) **a)** Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (x+4)$, interpréter le résultat graphiquement

2) **a)** Montrer que f est continue en 0, en déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$

b) Etudier la dérivabilité de f en 0, en déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

c) Calculer $f'(x)$ (fonction dérivée de f) pour tout réel x.

d) Ecrire une équation de la tangente T à la courbe Cf au point d'abscisse 0

3) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a) Dresser le tableau de variation de g pour tout $x \in [1; +\infty[$

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[1; +\infty[$ une unique solution α

c) En déduire le signe de g pour tout $x \in [1; +\infty[$.

Exercice 8

Soit la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 5} - 1$ et soit C_f sa courbe représentative.

1) a) Déterminer le domaine de définition de f.

b) Etudier la dérivabilité de f en 2. Interpréter le résultat graphiquement.

c) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+5}}$

d) Dresser le tableau de variations de f.

2) a) Montrer que l'équation $f(x) = -1$ admet une unique solution α dans $[2, +\infty[$

b) Vérifier que $\alpha = 2 + \sqrt{3}$

c) Monter que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) Déduire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse α.

3) Soit g la restriction de la fonction f sur $[2, +\infty[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

b) g^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier votre réponse.

c) Calculer $(g^{-1})'(1)$.

d) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in [2, +\infty[$

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

1) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

b) Calculer $f^{-1}(4)$.

c) Justifier que f^{-1} est dérivable en 4 et calculer $(f^{-1})'(4)$.

d) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J.

4) Montrer que pour tout réel $x \in J$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{2x-1}{x-3}$

5) Soit la fonction h définie sur $]4, +\infty[$ par $h(x) = f\sqrt{x}$

a) Montrer que h est dérivable sur $]4,+\infty[$ et calculer $h'(x)$.

b) Déduire le tableau de variation de la fonction h.

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $]-\infty,0]$ par $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) Dresser le tableau de variation de f.

3) Montrer que f réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

4) Soit la fonction g définie sur $]-\infty,0]$ par $g(x)=f(x)-x$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α dans $]-\infty,0]$

c) Vérifier que $\alpha\in\left]\frac{-3}{5},\frac{-1}{5}\right[$

d) En déduire la position relative de C_f et la droite $\Delta: y=x$

5) a) La fonction f^{-1} (fonction réciproque de f) est-elle dérivable a droite en (-1) ?

Justifier votre réponse.

b) Calculer $f\left(\frac{-1}{2}\right)$, Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{-3}{5}$ et calculer $(f^{-1})'\left(\frac{-3}{5}\right)$

c) Tracer (C) la courbe de f^{-1} dans le même repère (on précisant sur la demi-tangente).

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=1+\sqrt{x^2-1}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) a) Montrer que la droite $D: y=x+1$ est une asymptote oblique de C_f.

b) Etudier la position relative de la courbe de C_f par rapport à son asymptote D.

c) Tracer la courbe C_f et la droite D.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit f^{-1} la réciproque de f expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in J$.

c) Calculer $f(\sqrt{2})$ puis $(f^{-1})'(2)$.

d) Tracer la courbe $C_{f^{-1}}$ dans le même repère.