Chapitre 1

Généralités sur les Fonctions

I. Rappels

1. Fonction et ensemble de définition

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$.

⇨ Une fonction f de E dans $\mathbb{R}$ est un procédé qui à tout réel x de E fait correspondre au plus un réel noté f(x).

⇨ L'ensemble D des réels x pour lesquels f(x) existe est appelé l'ensemble de définition de la fonction f. On dit que f est définie sur D.

2. Représentation graphique

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan et f une fonction définie sur D.

⇨ On appelle représentation graphique de f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x, f(x))$ où $x \in D$.

⇨ Si $\mathscr{C}$ désigne la courbe représentative d'une fonction f, alors :

$$\mathscr{C} = \{M(x, f(x)) \text{ où } x \in D\}$$

On dit que $y = f(x)$ est l'équation de la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

3. Positions relatives de deux courbes :

Soit $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes respectives de deux fonctions f et g.

Etudier la position relative de deux courbes représentant deux fonctions f et g revient à étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

- si $f(x) - g(x) > 0$ alors $f(x) > g(x)$ ce qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$.
- Si $f(x) - g(x) < 0$, alors $f(x) < g(x)$ ce qui signifie que $\mathscr{C}_f$ est au dessous de $\mathscr{C}_g$.
- Si $f(x) - g(x) = 0$ pour certaines valeurs de x, alors $\mathscr{C}_f$ est $\mathscr{C}_g$ ont des points communs pour chacune de ces valeurs.

4. Parité

Soit une fonction f définie sur un ensemble D **symétrique par rapport à zéro**, c'est à dire que pour tout x de D, (-x) appartient à D.

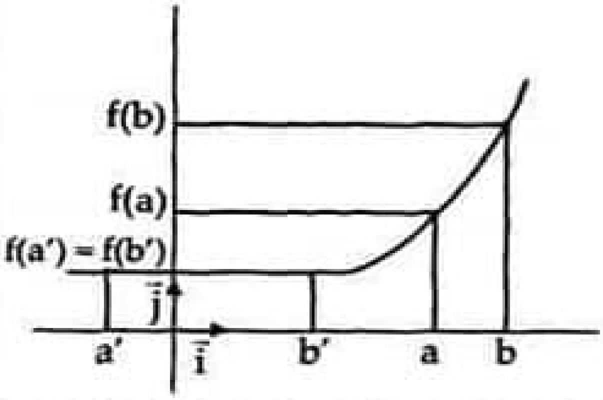
Parité de f	Définition	Elément de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$
Paire	$f(-x) = f(x)$	L'axe des ordonnées
Impaire	$f(-x) = -f(x)$	L'origine du repère

Conséquence : *Si f est paire ou impaire, alors on peut réduire l'étude de f à* $\mathbb{R}_+ \cap D$.

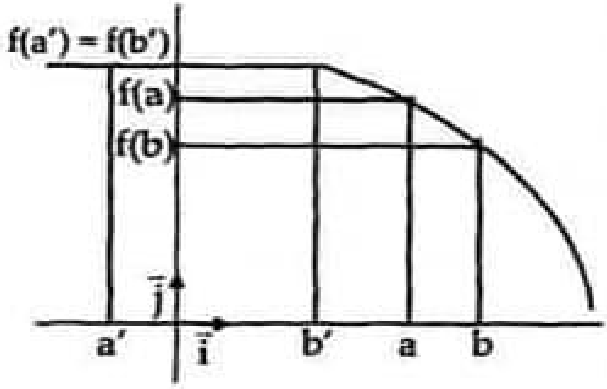
5. Sens de variation

⇨ Définitions :

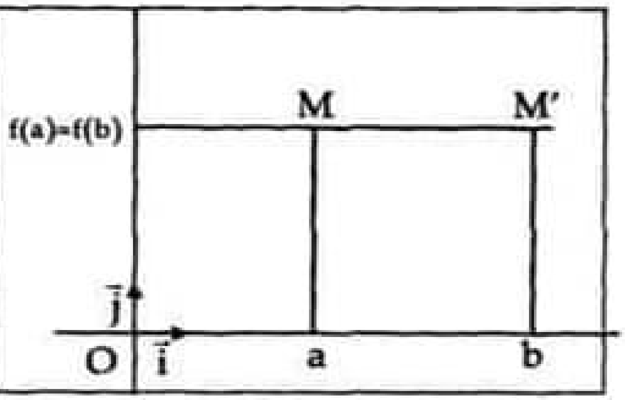
▸ Une fonction f est dite croissante sur un intervalle I si, et seulement si : pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \leq f(b)$



▸ Une fonction f est dite décroissante sur un intervalle I si, et seulement si : pour tous réels a et b de I tels que $a \leq b$, on a $f(a) \geq f(b)$



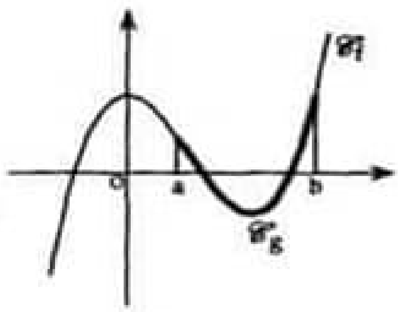
▸ Une fonction f est dite constante sur un intervalle I si : pour tous réels a et b de I on a $f(a) = f(b)$.



▸ Une fonction est dite *monotone* sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

II. Restriction d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et $\mathscr{C}$ sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D une partie de E. On appelle **restriction** de la fonction f à D,



la fonction g définie sur D par $g(x) = f(x)$, pour tout $x \in D$.

La représentation graphique de g est l'ensemble des points de $\mathscr{C}$ ayant pour coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in D$.

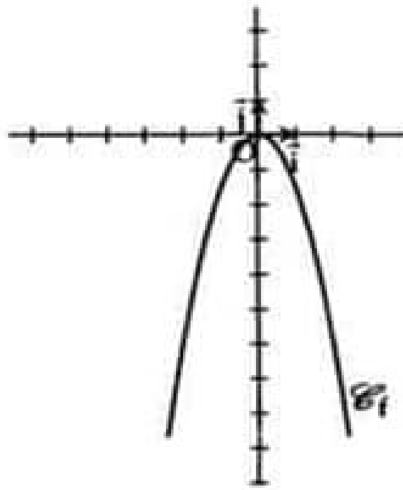
$a^2 < b^2$ (car a et b sont, de même signe et positifs)

$-\frac{3}{2}a^2 > -\frac{3}{2}b^2$

$f(a) > f(b)$ d'où f est décroissante sur $[0,+\infty[$.

b) $\mathscr{C}_f$ est une parabole de sommet le point O(0,0) et d'axe de symétrie l'axe des ordonnées.

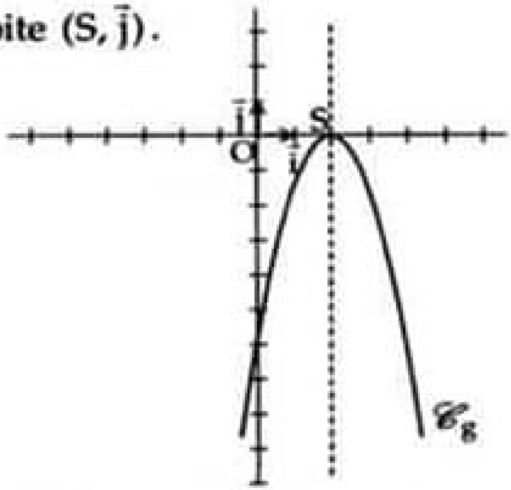
x	0	1	2
f(x)	0	$-\frac{3}{2}$	-6



On complète par symétrie par rapport à l'axe $(O,\vec{j})$.

2) $g(x) = -\frac{3}{2}(x-2)^2$

La représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de g est l'image de celle de f par la translation de vecteur $2\vec{i}$ donc $\mathscr{C}_g$ est la parabole de sommet le point S(2,0) et d'axe de symétrie la droite $(S,\vec{j})$.



3) a) $h(x) = -\frac{3}{2}(|x|-2)^2$

La fonction h est définie sur tout $\mathbb{R}$ donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(-x) \in \mathbb{R}$.

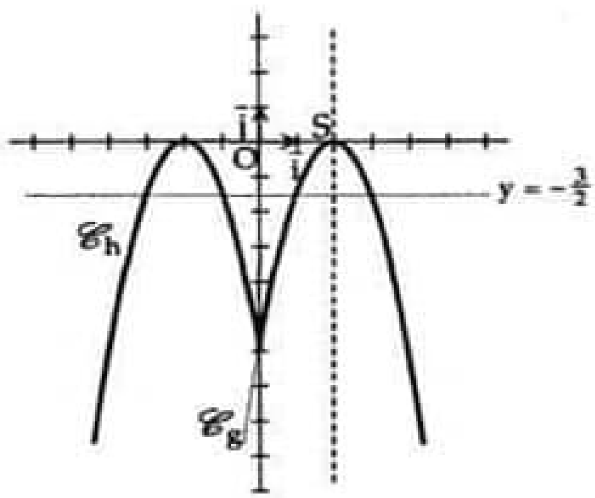
$h(-x) = -\frac{3}{2}(|-x|-2)^2 = -\frac{3}{2}(|x|-2)^2 = h(x)$.

D'où h est une fonction paire . Par conséquent la représentation graphique $\mathscr{C}_h$ de h est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées $(O,\vec{j})$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $|x| = x$ d'où $h(x) = -\frac{3}{2}(x-2)^2 = g(x)$.

Alors la représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la restriction de h à l'intervalle $[0,+\infty[$ est confondue avec la partie de $\mathscr{C}_g$ tracée sur $[0,+\infty[$ et puisque h est paire alors on dé[...] phique $\mathscr{C}_2$ de la restri[...]

de h à l'intervalle $]-\infty,0]$ par symétrie de $\mathscr{C}_1$ par rapport à l'axe des ordonnées $\mathscr{C}_h = \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2$.



4) $(|x|-2)^2 = 1$ signifie $-\frac{3}{2}(|x|-2)^2 = -\frac{3}{2}$ signifie $h(x) = -\frac{3}{2}$.

Graphiquement les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_h$ avec la droite d'équation $y = -\frac{3}{2}$.

$S_{\mathbb{R}} = \{-3,-1,1,3\}$.

6

1) $f_1(x) = -2x+1+\frac{3}{x}$, $x \in \;]0,+\infty[$

$g : x \mapsto -2x+1$ et $h : x \mapsto \frac{3}{x}$, les fonctions g et h sont décroissantes sur $]0,+\infty[$ donc $f_1 = g+h$ est décroissante sur $]0,+\infty[$

2) $f_2(x) = 1+x^2 - \frac{1}{x+1}$

$g : x \mapsto 1+x^2$ et $h : x \mapsto \frac{-1}{1+x}$

La fonction h est de la forme $x \mapsto \frac{a}{x+b}$ où $a<0$ donc h est croissante sur $]-1,+\infty[$.

La fonction g est de la forme $g : x \mapsto ax^2+bx+c$ et $a>0$ donc g est croissante sur $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right[$ d'où g est croissante sur $[0,+\infty[$.

f_2, étant somme de deux fonctions croissantes sur $[0,+\infty[$ donc f_2 est croissante sur $[0,+\infty[$

3) $f_3(x) = -2x - 1 + \dfrac{3}{x+2}$ sur $]-2,+\infty[$

La fonction $g : x \mapsto -2x - 1$ est affine et le coefficient directeur est négatif donc g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La fonction $h : x \mapsto \dfrac{3}{x+2}$ est de la forme $x \mapsto \dfrac{a}{x+b}$ où $a > 0$ donc h est décroissante sur $]-2,+\infty[$.

f_3 est somme de deux fonctions décroissantes sur $]-2,+\infty[$ donc f_3 est décroissante sur $]-2,+\infty[$.

4) $f_4(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ sur $]-\infty, 2]$

La fonction $g : x \mapsto -x^2 + 4x + 5$ est de la forme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ où $a < 0$ donc g croissante sur $\left]-\infty, -\dfrac{b}{2a}\right]$ donc f_4 est croissante sur $]-\infty, 2]$.

7

1) $f(x) = |1 - x| - |2x + 4| + x$

a)

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
signe de $(1-x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$\lvert 1-x \rvert$		$1-x$		$1-x$	0	$x-1$	
signe de $(2x+4)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\lvert 2x+4 \rvert$		$-2x-4$	0	$2x+4$		$2x+4$	

Si $x \in]-\infty,-2]$ alors $f(x) = (1-x) - (-2x-4) + x = 1 - x + 2x + 4 + x$
$= 2x + 5$

Si $x \in [-2,1]$ alors $f(x) = (1-x) - (2x+4) + x = 1 - x - 2x - 4 + x$
$= -2x - 3$

Si $x \in [1,+\infty[$ alors $f(x) = (x-1) - (2x+4) + x = x - 1 - 2x - 4 + x$
$= -5$

Conclusion : $\begin{cases} f(x) = 2x+5 & \text{si } x \in]-\infty,-2] \\ f(x) = -2x-3 & \text{si } x \in [-2,1] \\ f(x) = -5 & \text{si } x \in [1,+\infty[\end{cases}$

b) • Sur $]-\infty,-2]$, f(x) est de la forme $f(x) = ax + b$ où $a = 2 > 0$ donc f est croissante sur $]-\infty,-2]$.

• Sur $[-2,1]$ f(x) est de la forme $f(x) = ax + b$ où $a = -2 < 0$ donc f est décroissante sur $[-2,1]$.

- Sur $[1,+\infty[$, $f(x)=-5$ donc f est constante sur cet intervalle.

2) a) La représentation graphique de f est $C_f=[AB)\cup[AC]\cup[CD)$.
avec $A(-2,1)$, $B(-3,-1)$, $C(1,-5)$ et $D(2,-5)$.

b) La représentation graphique de f est située toute entière au dessous de la droite d'équation $y=1$ donc pour tout $x\in\mathbb{R}$ $f(x)\le 1$ d'où la valeur maximale de f(x) est 1.

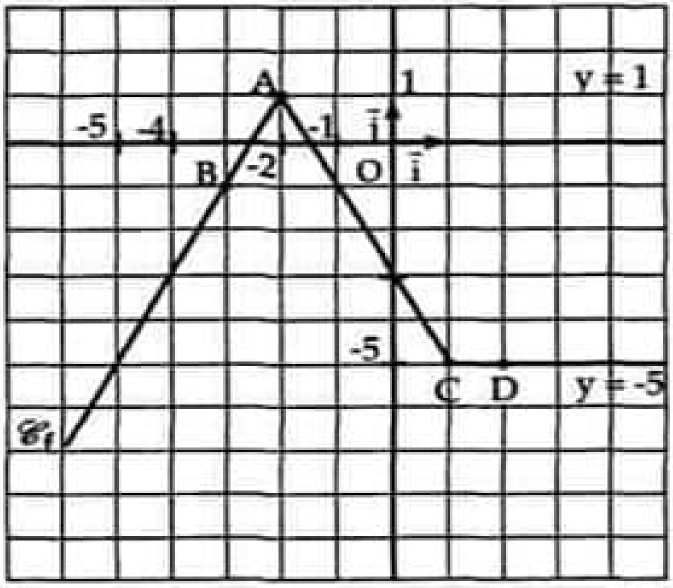
3) a) $|2x+4|-|1-x|=x+5$ signifie $-5=\underbrace{x+|1-x|-|2x+4|}_{f(x)}$ signifie $f(x)=-5$

Les solutions sont les abscisses des points d'intersection de C_f et la droite d'équation $y=-5$.

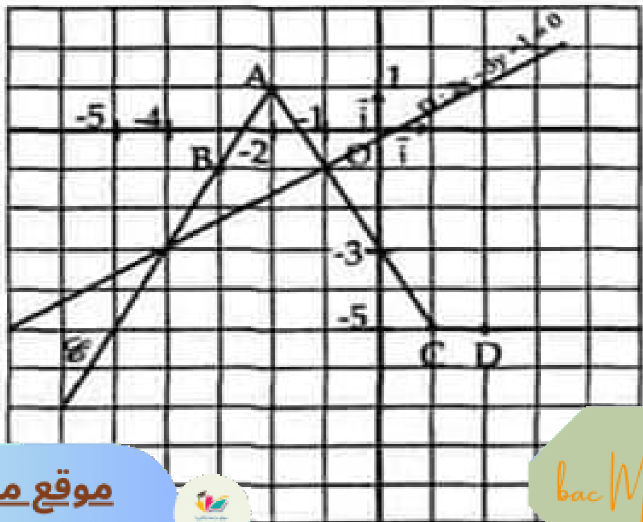
$$S_{\mathbb{R}}=[1,+\infty[\cup\{-5\}.$$

b) $|2x+4|-|1-x|>x+5$ signifie $-5>x-|2x+4|+|1-x|$ signifie $f(x)<-5$
Les solutions sont les abscisses des points de C_f situés strictement au dessous de la droite d'équation $y=-5$.

$$S_{\mathbb{R}}=]-\infty,-5[.$$



4) a) $D:2x-3y-1=0$ ou $D:y=\dfrac{2}{3}x-\dfrac{1}{3}$



x	−1	−4
y	−1	−3

- Si $x \in]-\infty,-4] \cup [-1,+\infty[$,
  C_f est au dessous de D.
- Si $x \in [-4,-1]$,
  C_f est au dessus de D.

8

1) $f: [-3,4] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 1 - xE(x)$

*) Si $x \in [-3,-2[$ alors $E(x) = -3$ d'où $f(x) = 1 - x(-3) \Rightarrow f(x) = 1+3x$

*) Si $x \in [-2,-1[$ alors $E(x) = -2$ d'où $f(x) = 1 - x(-2) \Rightarrow f(x) = 1+2x$

*) Si $x \in [-1,0[$ alors $E(x) = -1 \Rightarrow f(x) = 1+x$

*) Si $x \in [0,1[$ alors $E(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 1$

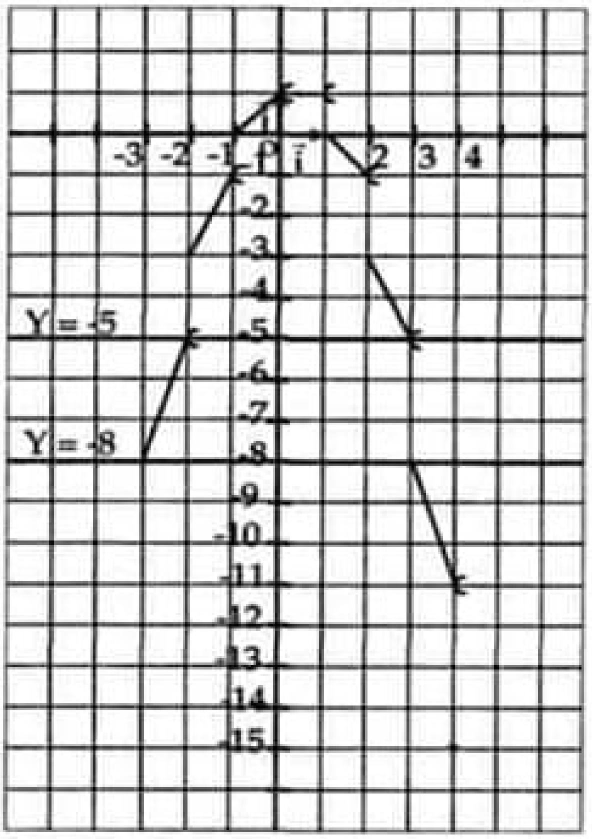
*) Si $x \in [1,2[$ alors $E(x) = 1 \Rightarrow f(x) = 1-x$

*) Si $x \in [2,3[$ alors $E(x) = 2$

$\Rightarrow f(x) = 1-2x$

*) Si $x \in [3,4[$ alors $E(x) = 3 \Rightarrow f(x) = 1-3x$

*) Si $x = 4$, $f(4) = 1 - 4E(4) = 1 - 16 = -15$



Conclusion :

$$\begin{cases} f(x) = 1+3x & \text{si } x \in [-3,-2[\\ f(x) = 1+2x & \text{si } x \in [-2,-1[\\ f(x) = 1+x & \text{si } x \in [-1,0[\\ f(x) = 1 & \text{si } x \in [0,1[\\ f(x) = 1-x & \text{si } x \in [1,2[\\ f(x) = 1-2x & \text{si } x \in [2,3[\\ f(x) = 1-3x & \text{si } x \in [3,4[\\ f(4) = -15 & \end{cases}$$

d'où f est une fonction affine par intervalles.

2) Voir la figure ci-contre

9

- Sur l'intervalle $]-\infty,-2]$, $f(x)$ est de la forme $ax+b$.
  La demi-droite qui la représente passe par les points $A(-2,2)$ et $B(-4,0)$.
  Donc le coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{0-2}{-4-(-2)} = \dfrac{-2}{-2} = 1$
  D'où $f(x) = x + b$ or $f(-4) = 0$ donc $0 = -4 + b$ et par suite $b = 4$
  $f(x) = x + 4$ pour tout $x \in]-\infty,-2]$.
- Sur l'intervalle $[-2,1]$ ...

Le segment [AC] qui la représente passe par le point O(0,0) donc $b = 0$.
Ce segment passe aussi par le point A(-2,2) donc le coefficient directeur est
$a = \frac{y_A}{x_A} = \frac{2}{(-2)} = -1$

Pour tout $x \in [-2,1]$, $f(x) = -x$.

- Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, f(x) est de la forme $ax+b$.

  La demi-droite qui la représente passe par les points $C(1,-1)$ et $D(2,2)$.

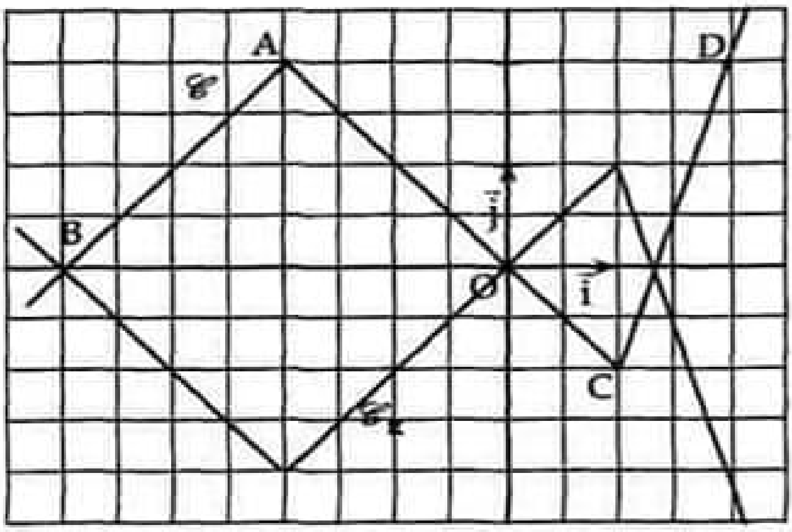
  Donc le coefficient directeur est $a = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{2-(-1)}{2-1} = 3$

  D'où $f(x) = 3x + b$ or $f(1) = -1$ donc $-1 = 3 + b$ et par suite $b = -4$

  $f(x) = 3x - 4$ pour tout $x \in [1,+\infty[$.

2) $g(x) = -f(x)$.

La courbe de g est la symétrique de la courbe de f par rapport à l'axe des abscisses.



10

$f(x) = \sqrt{x+4}$ $D_f = [-4,+\infty[$.

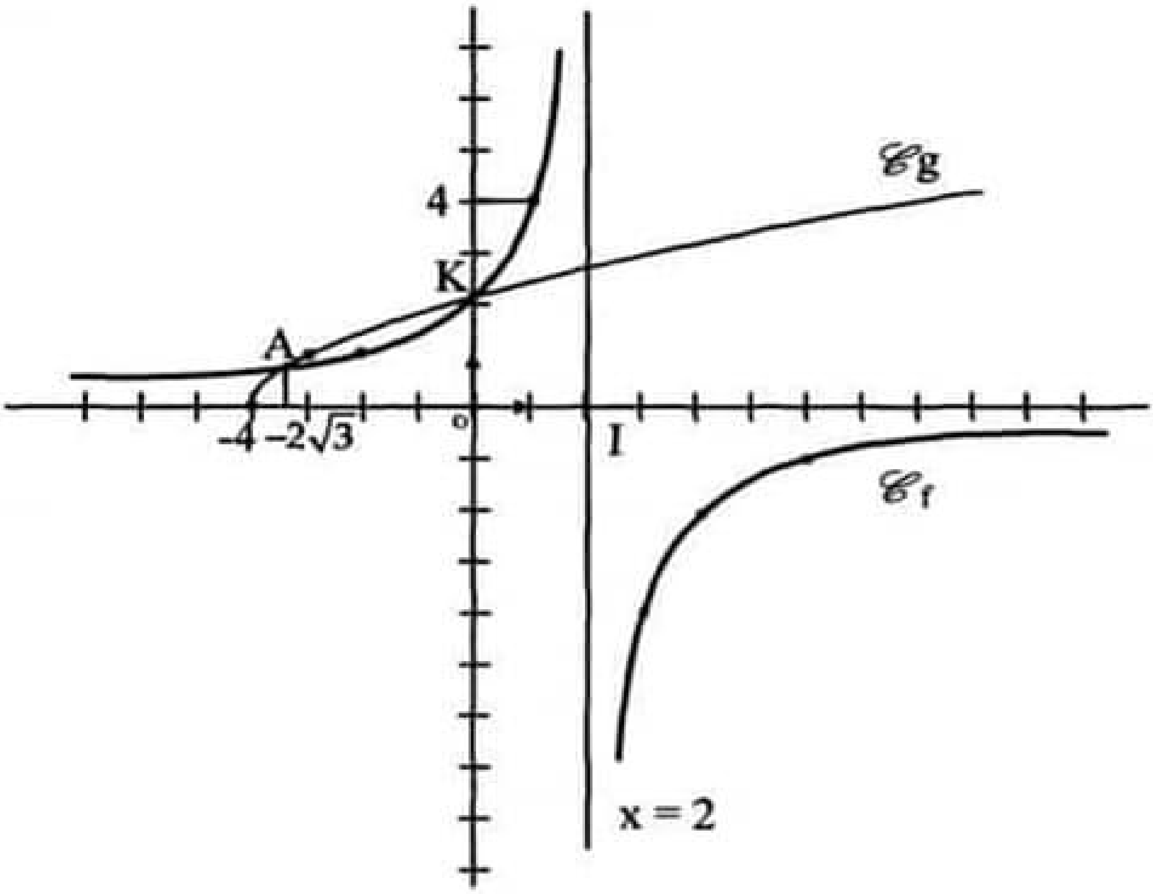
x	-4	-3	0	5
$y = \sqrt{x+4}$	0	1	2	3

$g(x) = \frac{-4}{x-2}$.

La représentation graphique $\mathscr{C}_g$ de g est une hyperbole de centre le point $I(2,0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = 2$ et $y = 0$.

x	2	3	4	6
$y = \frac{-4}{x-2}$		[illegible]	[illegible]	-1

On complète par symétrie par rapport au point $I(2,0)$.



2) $M(x,y) \in \mathscr{C}_f \cap \mathscr{C}_g$ signifie $\begin{cases} y = \sqrt{x+4} \\ y = \dfrac{-4}{x-2} \end{cases}$ signifie $\begin{cases} \sqrt{x+4} = \dfrac{-4}{x-2} \\ y = \sqrt{x+4} \end{cases}$

- $\sqrt{x+4} = \dfrac{-4}{x-2}$ (E)

  condition : $\dfrac{-4}{x-2} \geq 0$ et $x-2 \neq 0$ donc $x-2<0$ d'où $x \in]-\infty, 2[$.

  Pour tout $x \in]-\infty,2[$ l'équation (E) est équivalente à $x+4 = \dfrac{16}{(x-2)^2}$ signifie

  $(x+4)(x^2-4x+4)=16$ signifie $x^3-4x^2+4x+4x^2-16x+16=16$ signifie

  $x^3-12x=0$ signifie $x(x^2-12)=0$ signifie $x=0$ ou $x^2=12$

  $x^2=12$ signifie $x=\sqrt{12}$ ou $x=-\sqrt{12}$

  signifie $x=2\sqrt{3} \notin]-\infty,2[$ ou $x=-2\sqrt{3} \in]-\infty,2[$.

- Si $x=0$ alors $y=\sqrt{4}=2$

Si $x=-2\sqrt{3}$ alors $y=\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{(1-\sqrt{3})^2}=\left|1-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-1$

$\mathscr{C}_f\cap\mathscr{C}_g=\left\{K(0,2)\ ;\ A(-2\sqrt{3},\sqrt{3}-1)\right\}$

3) $\sqrt{x+4}+\dfrac{4}{x-2}\leq 0$ signifie $\sqrt{x+4}\leq\dfrac{-4}{x-2}$. Les solutions de l'inéquation $\sqrt{x+4}\leq\dfrac{-4}{x-2}$ sont les abscisses des points de $\mathscr{C}_g$ situés au dessous ou sur $\mathscr{C}_f$. $S_{\mathbb{R}}=\left[-4,-2\sqrt{3}\right]\cup[0,2[$.

11

1) Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $(|x|-1)^2\geq 0$ ça signifie que $2|x|\leq x^2+1$.

2) Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $2|x|\leq x^2+1$ ça signifie que $|f(x)|\leq 1$

donc Pour tout $x\in\mathbb{R}$: $-1\leq f(x)\leq 1$ d'ou f est bornée sur IR

3) Soient a et b deux réels de $[1,+\infty[$ tel que $a<b$

On a $f(a)-f(b)=\dfrac{2(a-b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)}$ et puisque $1\leq a<b$ alors $1-ab\leq 0$

et $a-b<0$

Et on a $(a^2+1)(b^2+1)>0$ d'ou $f(a)-f(b)\geq 0$ donc f est décroissante sur $[1,+\infty[$

4) a) pour tout $x\in\mathbb{R}$: $g(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}=\dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1}=1+\dfrac{2x}{x^2+1}=1+f(x)$

b) On a f est décroissante sur $[1,+\infty[$ donc g est décroissante sur $[1,+\infty[$

c) Soient $M(x,f(x))\in Cf$ et $M'(x,g(x))\in Cg$: $\overrightarrow{MM'}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

Donc Cg est l'image de Cf par la translation de vecteur $\overrightarrow{U}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

III. Construction d'une courbe à partir de celle d'une fonction de référence

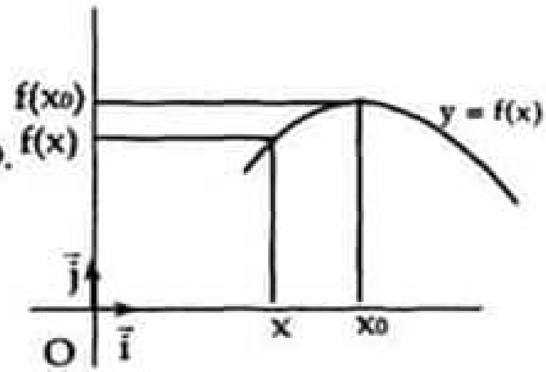
Soit f une fonction définie sur un ensemble D et représentée dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Fonctions définies par	Conditions d'existence	Transformations permettant de passer de $\mathscr{C}_f$ à $\mathscr{C}_g$
$g(x) = f(x) + b$	$x \in D$	Translation de vecteur $b\vec{j}$
$g(x) = f(x - a)$	$(x - a) \in D$	Translation de vecteur $a\vec{i}$
$g(x) = -f(x)$	$x \in D$	Symétrie d'axe $(O, \vec{i})$
$g(x) = \lvert f(x) \rvert$	$x \in D$	• $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_g$ lorsque $f(x) \geq 0$ • Symétrie d'axe $(O, \vec{i})$ lorsque $f(x) \leq 0$
$g(x) = f(\lvert x \rvert)$	$\lvert x \rvert \in D$	g est paire, donc : • sur $D \cap \mathbb{R}_+$, $\mathscr{C}_f = \mathscr{C}_g = \Gamma_1$ • sur $D \cap \mathbb{R}_-$, symétrique de Γ_1 par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$

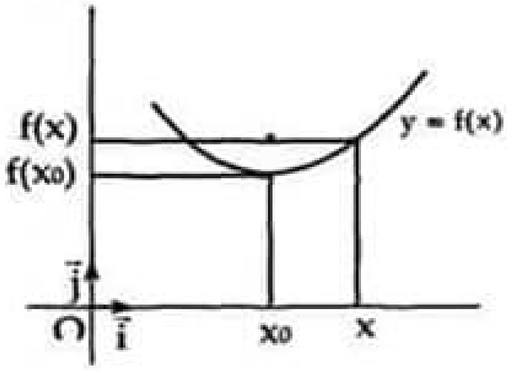
IV. Majorant – minorant

⇨ Maximum, minimum

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.



- S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \leq f(x_0)$. On dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un maximum de f sur D.



- S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \geq f(x_0)$. On dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un minimum de f sur D.

⇨ Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.

- La fonction f est dite **majorée** sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x) \leq M$

- La fonction f est dite **minorée** sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x de D, $f(x) \geq m$.
- La fonction f est dite **bornée** sur D s'il existe deux réels m et M tel que pour tout x de D, $m \leq f(x) \leq M$.

  Une fonction f est bornée sur un ensemble D, si elle est à la fois majorée et minorée.

V. Fonctions affines par intervalles

⇨ **Définition :**

On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction à chacun de ces intervalles soit affine.

La courbe représentative d'une fonction affine par intervalles est une réunion de demi-droites ou de segments de droites.

⇨ **Fonction Partie entière :**

- On appelle partie entière d'un réel x et on note E(x), le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.
- Soit E la fonction partie entière.

  Pour tout réel x, il existe un entier $n \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [n, n+1[$ et on a $E(x) = n$.

VI. La fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I .
- Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I.
- Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I.

VII. Variations et opérations sur les fonctions

⇨ **Opérations sur les fonctions :** Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Opérations	Les fonctions f et g sont définies sur D	Définitions (pour tout $x \in D$)
Addition	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Multiplication	$f \times g$	$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
Multiplication par un réel non nul	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

⇨ **Variations de la somme de deux fonctions**

Si les fonctions f et g ... ur un intervalle I, alors l... somme a la mê...

ENONCES

1 Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de chacune des fonctions suivantes :

1) $f : x \mapsto \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$

2) $g : x \mapsto \sqrt{x^2 - |x|}$

3) $h : x \mapsto \sqrt{-1 + \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2}}$

4) $k : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3} - 2}$

2 Soit une fonction f définie sur $[-5,2]$ et telle que : $f(-5) = -2$; $f(0) = 2$ et $f(2) = -1$. On suppose que f est croissante sur $[-5,0]$ et décroissante sur $[0,2]$. Montrer que la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$ admet un maximum sur l'intervalle $[-5,2]$.

3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x+1)^2 + 2$.
   a) Montrer que f est majorée sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que f est bornée sur $[-1,3]$
2) Montrer que pour tout $x \in [0,2[$ on a $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} \geq \frac{1}{2}$.
3) Montrer que pour tout réel x, $\sqrt{x^2 - 2x + 3} \geq 1$

4 Démontrer que chacune des fonctions suivantes est bornée sur l'intervalle donné :

1) $f_1(x) = \frac{4}{x^2 + 4}$ sur $\mathbb{R}$

2) $f_2(x) = -\frac{2}{\sqrt{x} + 1}$ sur $[0, +\infty[$

3) $f_3(x) = 4 - (x+2)^2$ sur $[-2,5]$

4) $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$ sur $[0 ; 1,44]$

5 Soit la fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2$

1) a) Donner le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$.
   b) Tracer la courbe représentative C_f de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2) Soit la fonction $g : x \mapsto -\frac{3}{2}(x-2)^2$.
   Tracer C_g à partir de C_f.
3) Soit la fonction h : x ...
   a) Vérifier que ...

b) Construire C_h à partir de C_g.

4) Résoudre graphiquement $(|x|-2)^2 = 1$.

6 Pour chacune des fonctions suivantes, étudier son sens de variation

1) $f_1(x) = -2x + 1 + \dfrac{3}{x}$ sur $]0, +\infty[$

2) $f_2(x) = 1 + x^2 - \dfrac{1}{x+1}$ sur $[0, +\infty[$

3) $f_3(x) = -2x - 1 + \dfrac{3}{x+2}$ sur $]-\infty, -2[$

4) $f_4(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ sur $]-\infty, -1]$

7 Soit la fonction f définie par $f(x) = |1-x| - |2x+4| + x$

1) a) Ecrire f(x) sans valeur absolue.
   b) Etudier le sens de variation de f sur chacun des intervalles $]-\infty, -2]$, $[-2, 1]$ et $[1, +\infty[$.

2) a) Représenter graphiquement f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   b) Déterminer la valeur maximale de f(x) lorsque x varie dans $\mathbb{R}$.

3) Résoudre graphiquement
   a) $|2x+4| - |1-x| = x + 5$ b) $|2x+4| - |1-x| > x + 5$.

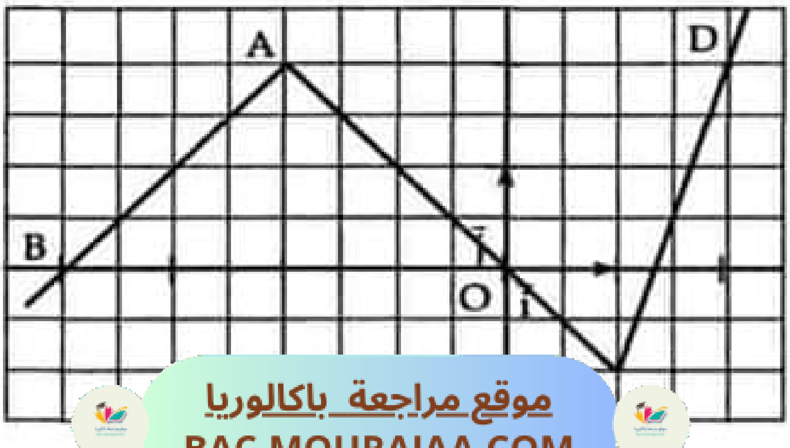
4) a) Tracer dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la droite $D: 2x - 3y - 1 = 0$.
   b) Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de x la position relative de C_f et D.

8 Soit la fonction $f: [-3, 4] \to \mathbb{R}$; $x \mapsto 1 - xE(x)$.

1) Ecrire plus simplement f(x) et en déduire que f est une fonction affine par intervalles

2) Représenter graphiquement f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

9 La représentation graphique dans un repère d'une fonction affine par intervalles f est $[AB) \cup [AC] \cup [CD)$.



1) Déterminer f(x)
2) Tracer dans le même repère la courbe de $g(x)=-f(x)$.

10 Soient les fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{x+4}$ et $g(x)=\frac{-4}{x-2}$.

1) Tracer dans un même repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les représentations graphiques respectives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ de f et g.
2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
3) Résoudre graphiquement l'inéquation $\sqrt{x+4}+\frac{4}{x-2}\leq 0$.

11 Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$.

1) Montrer que pour tout $x\in$ IR : $2|x|\leq x^2+1$.
2) En déduire que f est bornée sur IR.
3) Etudier le sens de variations de f sur $[1,+\infty[$.
4) Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.
   a) Vérifier que pour tout $x\in$ IR : $g(x)=f(x)+1$.
   b) Etudier le sens de variations de g sur $[1,+\infty[$.
   c) On désigne par Cf et Cg les courbes respectives de f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Montrer que Cg se déduit de Cf par une transformation simple que l'on déterminera.

CORRIGES

1

1) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$

f est définie si et seulement si $2x^2-3x+1\geq 0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		+	0	−	0	+	

$D_f=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

Le domaine de définition de f n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f n'est ni paire ni impaire.

2) $g:x\mapsto\sqrt{x^2-|x|}$

g est définie si et seulement si $x^2-|x|\geq 0$ signifie $|x|(|x|-1)\geq 0$

signifie $x=0$ ou $|x|-1\geq 0$ $\Leftrightarrow x=0$ ou $|x|\geq 1$ $\Leftrightarrow x=0$ $x\geq 1$ ou $x\leq -1$.

$D_g=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[\cup\{0\}$

Pour tout $x\in D_g$, $-x\in D_g$ et $g(-x)=g(x)$ donc g est paire.

3) $h:x\mapsto\sqrt{-1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}}$

La fonction h est définie si et seulement si $\begin{cases}x\neq 0\\ -1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}\geq 0\end{cases}$

Pour tout $x\neq 0$, on a $-1+\frac{3}{x}+\frac{4}{x^2}=\frac{-x^2+3x+4}{x^2}$

Puisque $x^2>0$ pour tout $x\neq 0$, alors on étudie le signe du trinôme $-x^2+3x+4$

Les racines de ce trinôme sont -1 et 4 $\left(a-b+c=0,\ x'=-1 \text{ et } x''=\frac{-c}{a}=4\right)$

x	$-\infty$		-1		0		4		$+\infty$
$-x^2+3x+4$		−	0	+			0	−	

La fonction h est donc définie sur $[-1,4]\setminus\{0\}$.

Le domaine n'est pas symétrique par rapport à 0 donc h n'est ni paire ni impaire.

4) $k(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}-2}$

k est définie si et seulement si $x^2-3\geq 0$ et $\sqrt{x^2-3}-2\neq 0$

- $x^2-3\geq 0$ signifie $x\in\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},+\infty\right[$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		$+\infty$
x^2-3		+	0	−	0	+	

- $\sqrt{x^2-3}-2=0 \Leftrightarrow x^2-3=4 \Leftrightarrow x^2=7 \Leftrightarrow x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$

  donc $\sqrt{x^2-3}-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\sqrt{7}$ et $x\neq-\sqrt{7}$

La fonction k est définie sur $\left]-\infty,-\sqrt{7}\right[\cup\left]-\sqrt{7},-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},\sqrt{7}\right[\cup\left]\sqrt{7},+\infty\right[$

Le domaine de définition de k est symétrique par rapport à 0 donc on étudie sa parité.

Pour tout $x\in D_k$ on a $x\leq-\sqrt{3}$ ou $x\geq\sqrt{3}$ et $x\neq-\sqrt{7}$ et $x\neq\sqrt{7}$

donc $-x\geq\sqrt{3}$ ou $-x\leq-\sqrt{3}$ et $x\neq\sqrt{7}$ et $x\neq-\sqrt{7}$

d'où $-x\in D_k$. $k(-x)=\dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2-3}-2}=-\dfrac{x}{\sqrt{x^2-3}-2}=-k(x)$

On conclut que k est impaire.

2

- Pour tout $x\in[-5,0]$ on a $-5\leq x\leq 0$.

  Puisque f est croissante sur $[-5,0]$ alors $f(-5)\leq f(x)\leq f(0)$.

  Or $f(-5)=-2$ et $f(0)=2$ alors $-2\leq f(x)\leq 2$ d'où $|f(x)|\leq 2$.
- Pour tout $x\in[0,2]$ on a : $0\leq x\leq 2$.

  Puisque f est décroissante sur $[0,2]$ alors $f(2)\leq f(x)\leq f(0)$.

  Or $f(2)=-1$ et $f(0)=2$ alors $-1\leq f(x)\leq 2$ et puisque $-2\leq-1$ alors $-2\leq f(x)\leq 2$. Par suite $|f(x)|\leq 2$.
- Conclusion : Pour tout $x\in[-5,2]$ on a $|f(x)|\leq 2$ donc 2 est un maximum pour $|f(x)|$ sur $[-5,2]$.

3

1) $f(x)=-(x+1)^2+2$.

   a) Pour tout réel x, on a : $-(x+1)^2\leq 0$ d'où $-(x+1)^2+2\leq 2$ et par conséquent, pour tout réel x : $f(x)\leq 2$.

   f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

   b) $x\in[-1,3] \Leftrightarrow 0\leq x+1\leq 4 \Leftrightarrow 0\leq(x+1)^2\leq 4^2$

$\Leftrightarrow -16 \leq -(x+1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow -14 \leq f(x) \leq 2$

Sur $[-1,3]$, f est majorée par 2 et minorée par -14 donc f est bornée sur $[-1,3]$

2) Pour tout $x \in [0,2[$ on a $4-x^2 \leq 4$, d'où $0 < \sqrt{4-x^2} \leq 2$ d'où $\dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}} \geq \dfrac{1}{2}$.

3) Pour tout réel x, $x^2-2x+3=(x-1)^2-1+3=(x-1)^2+2$

or pour tout réel x, $(x-1)^2+2 \geq 2$ d'où $\sqrt{(x-1)^2+2} \geq \sqrt{2} > 1$.

Donc $\sqrt{x^2-2x+3} \geq 1$ pour tout réel x.

Remarque : Si $a<b$ alors $a \leq b$.

4

1) Pour tout réel x, on a $x^2+4 \geq 4$ d'où $0<\dfrac{1}{x^2+4} \leq \dfrac{1}{4}$ donc $0<\dfrac{4}{x^2+4} \leq 1$

D'où $f_1(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

2) $f_2(x) = -\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$ sur $[0,+\infty[$

Pour tout $x \geq 0$ on a $\sqrt{x}+1 \geq 1$ d'où $0<\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} \leq 1$.

Donc $-2<-\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}<0$ d'où f_2 est majorée par 0 et minorée par -2.

$f_2(x)$ est bornée sur $[0,+\infty[$.

3) $f_3(x)=4-(x+2)^2$ sur $[-2,5]$

$-2 \leq x \leq 5$ donc $0 \leq x+2 \leq 7$ donc $0 \leq (x+2)^2 \leq 49$

$-49 \leq -(x+2)^2 \leq 0$. Ainsi, $-45 \leq 4-(x+2)^2 \leq 4$

$f_3(x)$ est bornée sur $[-2,5]$.

4) $f_4(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ sur $[0\,;1,44]$

$0 \leq x \leq 1,44$ d'où $0 \leq \sqrt{x} \leq 1,2$ donc $-2 \leq \sqrt{x}-2 \leq -0,8$

$\dfrac{-1}{0,8} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}-2} \leq \dfrac{1}{-2}$

$f_4(x)$ est bornée sur $[0\,;1,44]$.

5 $f(x)=-\dfrac{3}{2}x^2$

1) a) Soient a et b deux réels de l'intervalle $[0,+\infty[$ tel que $a<b$.

Comparons $f(a)$ et $f(b)$.

On a : $0 \leq a < b$