

DREAM
في الرياضيات 

MATHÉMATIQUE

Bac Maths

Coniques - Résumés de cours



1°) La parabole

Définition

Etant donné une droite D et un point F n'appartenant pas à D ,

On appelle **parabole** de **foyer** F et de **directrice** D l'ensemble des points M du plan tels que $MF = MH$ où $H = p_D^\perp(M)$ ou bien $MF = d(M, D)$.

On note $P_{(F, D)} = \{M \in P / MF = d(M, D)\}$.

Vocabulaire

P une parabole de foyer F et de directrice D . La perpendiculaire D menée de F est appelée **axe focal** (F, D) est appelée **paramètre** de P .

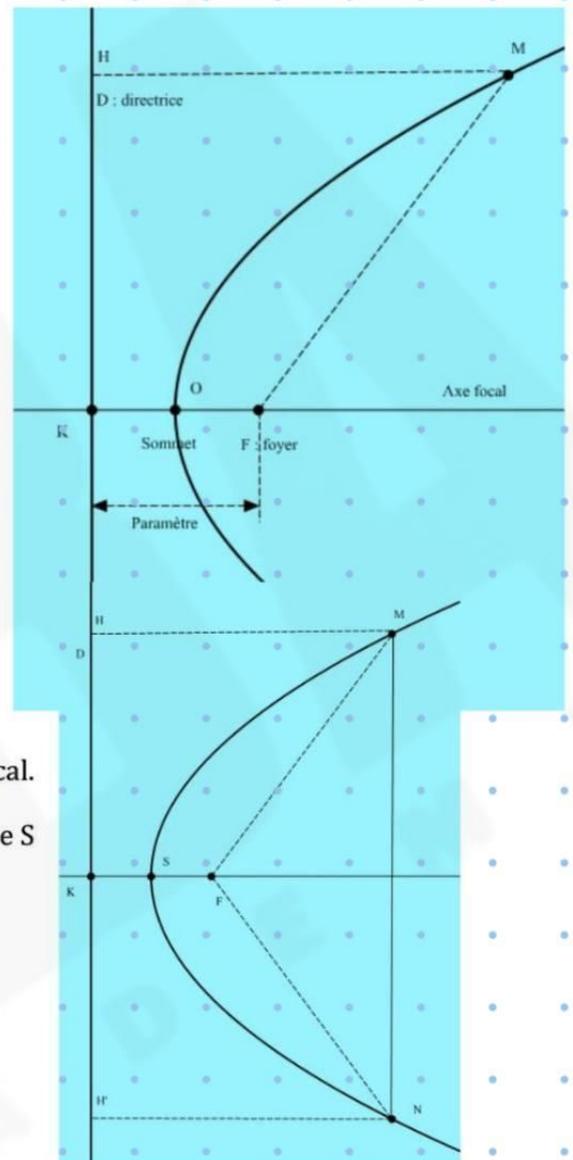
Théorème

Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal.

Toute parabole rencontre son axe focal en un point unique S appelé **sommet** de la parabole

Le sommet de $P_{(F, D)}$ est le milieu de $[FK]$ où

$K = p_D^\perp(F)$.



Equation réduite d'une parabole

Théorème

P une parabole de sommet S, de foyer F, de paramètre p et de directrice D.

On munit le plan à un repère orthonormé (S, \vec{i}, \vec{j}) où $\vec{i} = \frac{1}{SF} \overline{SF}$

La parabole P a pour équation $y^2 = 2px$, D : $x = -\frac{p}{2}$ et

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right).$$

Inversement

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan, l'ensemble des points M(x, y) tels que $y^2 = 2px$ ($p > 0$) est la parabole de foyer $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, de directrice D : $x = -\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O.

$y^2 = 2px$ est l'équation réduite de P.

Deuxième forme

$R = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan

Une courbe (Γ) ayant pour équation dans R : $(x^2 = 2ky ; k \in \mathbb{R}^*)$ est une parabole, son foyer est le point $F\left(0, \frac{k}{2}\right)$ et sa directrice est la droite D : $y = -\frac{k}{2}$

Le point Ω est le sommet de cette parabole, la droite (Ω, \vec{j}) est son axe

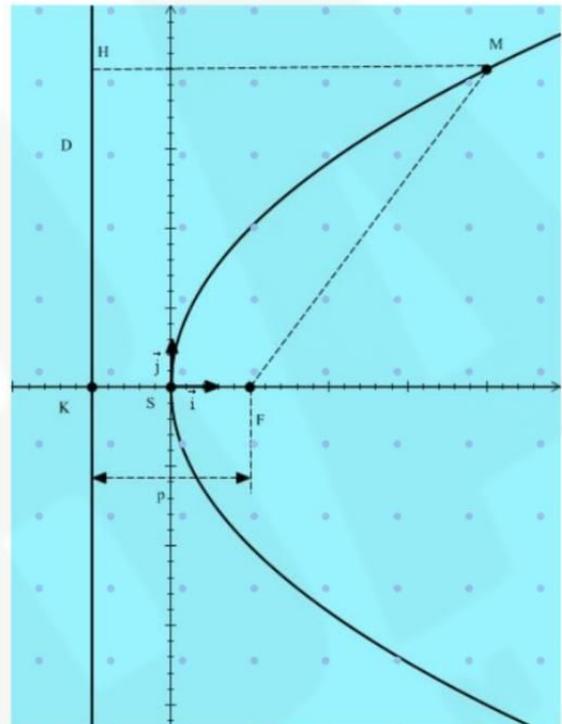
Le réel positif $p = |k|$ est son paramètre.

Tangente à une parabole

Théorème

(S, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan.

P est une parabole d'équation $y^2 = 2kx ; k \in \mathbb{R}^*$



P admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ une tangente (T) ayant pour équation cartésienne dans le même repère : $yy_0 = k(x + x_0)$

En particulier : P admet en son sommet S une tangente dont l'équation cartésienne dans le même repère est celle de la droite (S, \vec{j}) , elle est donc parallèle à la directrice D de P.

Deuxième forme

Si la parabole P a pour équation cartésienne dans (S, \vec{i}, \vec{j}) : $(x^2 = 2ky ; k \in \mathbb{R}^*)$ alors la tangente (T) à P en un point $M_0(x_0, y_0)$ de P a pour équation cartésienne dans le même repère : $xx_0 = k(y + y_0)$.

En particulier :

La tangente à P en son sommet S a pour équation $(y = 0)$, c'est la droite (S, \vec{i}) parallèle à la directrice

$$D : y = -\frac{k}{2}$$

2°) L'hyperbole

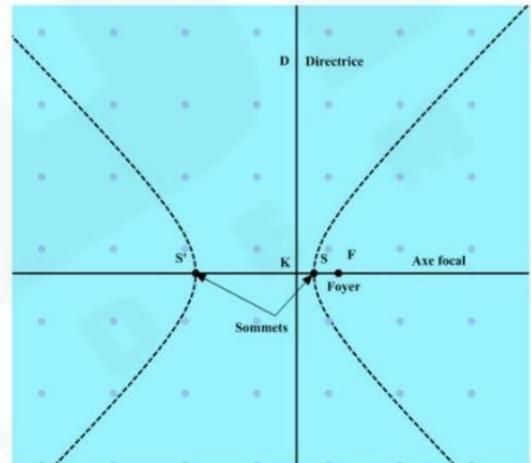
Définition

Etant donné une droite D, un point F n'appartenant pas à D et un réel $e > 1$.

On appelle hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan tels que

$$\frac{MF}{MH} = e, \text{ où H est le projeté orthogonal de M sur D.}$$

$$\text{On note } H_{(F, D, e)} = \left\{ M \in P \mid \frac{MF}{MH} = e, \text{ où } H = p_D^\perp(M) \right\}.$$



- La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'hyperbole.
- L'axe focal de H est un axe de symétrie pour H.

- H rencontre son axe focal en deux points S et S' appelés sommets de H et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1) ; (K, e) et (F, 1) ; (K, -e) où $K = p_D^\perp(F)$

Equation réduite d'une hyperbole

Théorème

Soit H une hyperbole de foyer F, de directrice D, d'excentricité e et de sommets S et S'.

On désigne par O le milieu de [SS'], on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire \vec{j} directeur de D

Si S(a, 0) et F(c, 0) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) alors l'hyperbole H a pour équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec

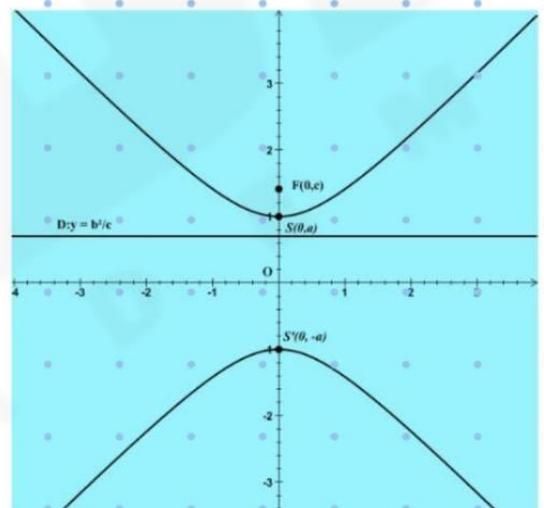
$b^2 = c^2 - a^2$ Inversement : L'ensemble des points M(x, y) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan

teils que: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$ et $b > 0$) est une hyperbole de foyer F(c, 0), de directrice D : $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité.

$e = \frac{c}{a}$ et de sommets S(a, 0) et S'(-a, 0) avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Deuxième forme

La courbe H : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan est une hyperbole de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y = \frac{b^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{b}$ et de sommets S(0, b) et S'(0, -b) avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Remarque

- Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets (c'est une conique à centre)

- Toute hyperbole admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre appelé axe transverse.

- L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F .

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F' est le foyer associé à la directrice D' .

Tangentes et asymptotes à une hyperbole

Théorème

➤ Soit $H : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

H admet deux asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ dans le même repère.

➤ Si $H : -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

H admet deux asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$ dans le même repère

La tangente à H en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $-\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ dans le même repère.

Remarque

➤ Si $a = b$ alors H est dite équilatère, ses asymptotes sont perpendiculaires et son excentricité $e = \sqrt{2}$.

➤ La tangente au sommet d'une hyperbole est parallèle aux directrices.

Equation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

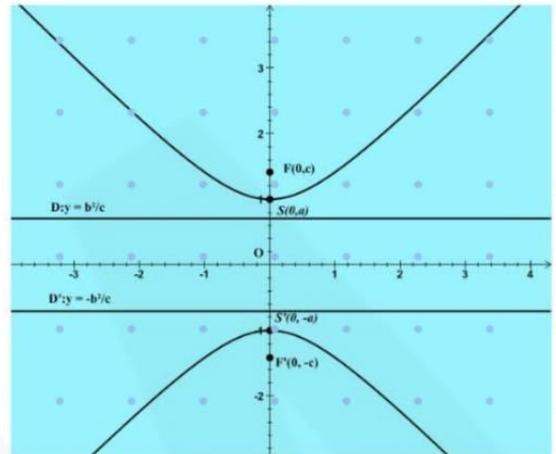
Théorème :

Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a pour équation $XY = k$ où k est un réel non nul.

3°) L'ellipse

Définition

Etant donné une droite D , un point F n'appartenant pas à D et un réel $0 < e < 1$.



On appelle ellipse de foyer F , de directrice D et d'excentricité e , l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{MH} = e$, où H est le projeté orthogonal de M sur

D .

On note $E_{(F, D, e)} = \left\{ M \in P / \frac{MF}{MH} = e, \text{ où } H = p_D^\perp(M) \right\}$.

- La perpendiculaire à D passant par F est appelée axe focal de l'ellipse.
- L'axe focal de E est un axe de symétrie pour E .
- E rencontre son axe focal en deux points S et S' appelés sommets principaux de E et ils sont les barycentres respectifs des points $(F, 1)$; (K, e) et $(F, 1)$; $(K, -e)$ où $K = p_D^\perp(F)$

Equation réduite d'une ellipse

Théorème

Soit E une ellipse de foyer F , de directrice D , d'excentricité e et de sommets principaux S et S' .

On désigne par O le milieu de $[SS']$, on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$ et on considère un vecteur unitaire \vec{j} directeur de D

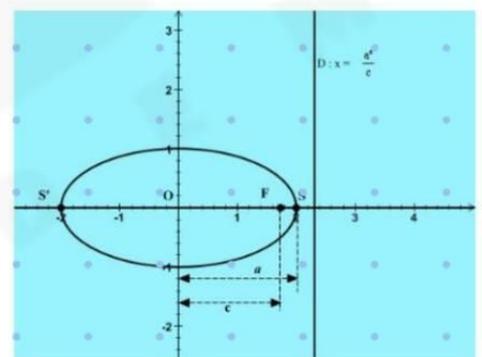
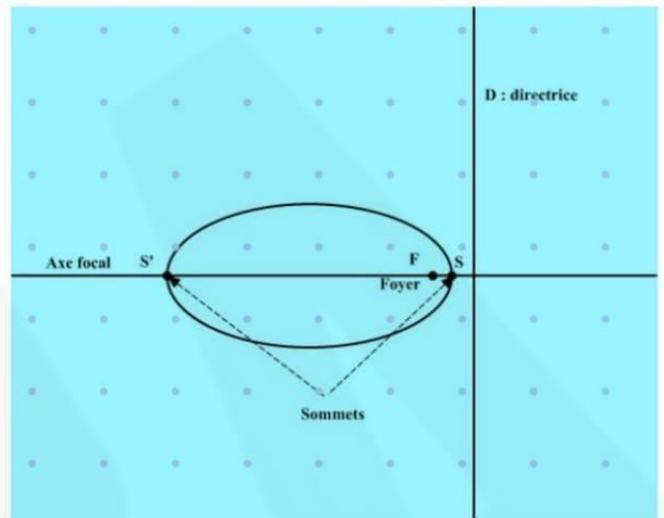
Si $S(a, 0)$ et $F(c, 0)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) alors l'ellipse E a pour

équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec

$$b^2 = a^2 - c^2$$

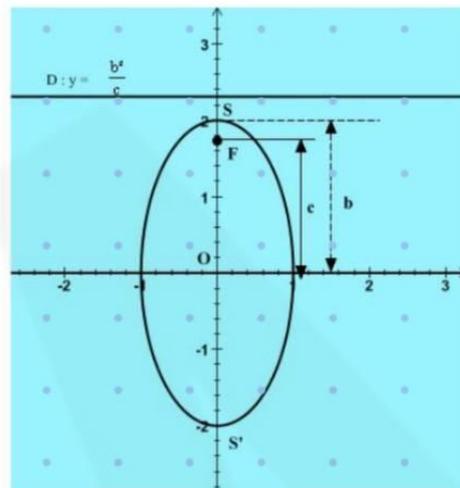
Inversement : L'ensemble des points $M(x, y)$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

($a > b > 0$) est une ellipse de foyer $F(c, 0)$, de directrice $D : x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ et de sommets principaux $S(a, 0)$ et $S'(-a, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.



Deuxième forme

La courbe E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan avec $0 < a < b$ est une ellipse de centre O, de foyer F(0, c), de directrice D : $y = \frac{b^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{b}$ et de sommets principaux S(0, b) et S'(0, -b) avec $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.



Remarque

- Toute ellipse admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets principaux (c'est une conique à centre)
- Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice passant par le centre.
- Ce deuxième axe coupe l'ellipse en deux points appelés sommets secondaires.
- L'existence d'un centre de symétrie implique l'existence d'une deuxième directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F.

On dit que F est le foyer associé à la directrice D et F' est le foyer associé à la directrice D'.

Tangentes à une ellipse

Théorème

Soit E : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) $a > 0$ et $b > 0$

La tangente à E en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$ dans le même repère.