Fonctions primitives

EXERCICE N°1 3 POINTS 15′

a) Déterminer l'ensemble de définition de f telle que $f(x)=\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$.

b) Déterminer a et b pour que f admette une primitive F telle que $F(x)=\frac{ax+b}{x^2+x+1}$.

EXERCICE N°2 3 POINTS 15′

Soit $f(x)=\frac{4x-1}{(2x+1)^3}$.

a) Déterminer les réels a et b tels que : pour tout $x\in Df$, $f(x)=\frac{a}{(2x+1)^2}+\frac{b}{(2x+1)^3}$

b) Déterminer toutes les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

EXERCICE N°3 7 POINTS 15′

Soit la fonction $f(x)=(x-1)\sqrt{\frac{1}{2x+1}}$

1°) Déterminer D l'ensemble de définition de f, puis déterminer les réels a et b tels que : pour tout $x\in D$,

$f(x)=a\sqrt{2x+1}+\frac{b}{\sqrt{2x+1}}$.

2°) Déterminer les primitives de f sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

EXERCICE N°4 4 POINTS 25′

Soit $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$.

1°) Montrer que f admet des primitives sur $]0;1[$.

2°) Soit F la primitive de f sur $]0;1[$ qui s'annule pour $x=\frac{3}{4}$ et g la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$

par $g(x)=F(\cos^2 x)$.

a) Montrer g est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ puis calculer g'.

b) Montrer que pour tout x de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ on a : $g(x)=-2x+\frac{\pi}{3}$.

EXERCICE N°4 4 POINTS 25′

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ et F la primitive de f sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en zéro.

1°) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=F(\tan x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[: H(x)=x$.

c) Calculer alors $F(1)$.

2°) Soit G la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $G(x)=F\left(\dfrac{1}{1+x}\right)+F\left(\dfrac{x}{x+2}\right)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $[0,+\infty[$, et déterminer $G'(x)$.

b) En déduire que : $F\left(\dfrac{1}{2}\right)+F\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.

EXERCICE N°4 6 POINTS 35′

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit F la primitive de f sur IR qui s'annule en zéro.

a) Montrer que F est impaire.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[: x\le F(x)\le 2x$.

c) En déduire la limite de F en $+\infty$.

d) Dresser le tableau de variation de F.

3°) Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $G(x)=F(\cos x)$.

a) Dresser le tableau de variation de G.

b) Donner l'allure de la courbe de G sur autre repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$. (on prend $F(1)=1{,}9$.

BEN RHIM SAMI

On a : $g : x \longmapsto F(\cos^2 x)$; $x \in \underbrace{]0, \frac{\pi}{2}[}_{J}$

On a : • $x \longmapsto \cos^2 x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc elle dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

• $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $\cos^2 x \in \underbrace{]0, 1[}_{I}$

• F est dérivable sur $]0, 1[$

donc $g : x \longmapsto F(\cos^2 x)$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;

$$g'(x) = (\cos^2 x)' \times F'(\cos^2 x)$$

$$= -2 \sin x \cos x \times f(\cos^2 x)$$

$$= -2 \sin x \times \cos x \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x (1 - \cos^2 x)}}$$

$$= -2\sin x \times \cos x \times \frac{1}{\sqrt{\cos^2 x \times \sin^2 x}}$$

$$= -2\, \cancel{\sin x} \times \cancel{\cos x} \times \frac{1}{\underbrace{|\cos x|}_{\cos x} \times \underbrace{|\sin x|}_{\sin x}}$$

(car $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$)

$$= -2$$

donc $\boxed{\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\; ; \quad g'(x) = -2}$

b) montrons que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[\; ; \; g'(x) = -2$

On a : $g'(x) = -2$

donc $g(x) = -2x + c \quad ; c \in \mathbb{R}$

or $F\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ $\qquad \left(\cos \frac{\pi}{6}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

sig $F\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 0$

sig $g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

sig $-2 \times \frac{\pi}{6} + c = 0$ $\quad$ sig $c = \frac{\pi}{3}$

donc $\boxed{g(x) = -2x + \frac{\pi}{3}}$

Exercice N°5

$f : x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$; $x \in [0;+\infty[$

F la primitive de f sur $\underbrace{[0;+\infty[}_{I}$ / $F(0)=0$

1) $H : x \longmapsto F(\tan x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

On a:

- $x \longmapsto \tan x$ est derivable sur $\underbrace{[0, \frac{\pi}{2}[}_{J}$
- $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$; $\tan x \in \underbrace{[0;+\infty[}_{I}$
- F est dérivable sur $[0;+\infty[$

Donc: H est derivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$;

$$H'(x) = (\tan x)' \times F'(\tan x)$$

$$= (1+\tan^2 x) \times f(\tan x)$$

$$= (1+\tan^2 x) \times \frac{1}{1+\tan^2 x}$$

$$= 1$$

Ali Douma

b) On a : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\,;\; H'(x) = 1$

donc : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\,;\; H(x) = x + c \,, (c \in \mathbb{R})$

or $F(0) = 0$

sig $F(\tan 0) = 0$

sig $H(0) = 0$ sig $c = 0$

donc $\boxed{\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[\,;\; H(x) = x}$

c) $F(1) = F(\tan \frac{\pi}{4}) = H(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

donc $\boxed{F(1) = \frac{\pi}{4}}$

2) G est définie sur $[0;+\infty[$;

$$G(x) = F\left(\frac{1}{1+x}\right) + F\left(\frac{x}{x+2}\right)$$

On a :

- $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$
- $\forall x \in [0;+\infty[$; $1+x \geq 1$

donc $0 < \dfrac{1}{1+x} \leq 1$

donc $\forall x \in [0;+\infty[$; $\dfrac{1}{1+x} \in [0;+\infty[$

- F est dérivable sur $[0;+\infty[$

donc $x \longmapsto F\left(\dfrac{1}{1+x}\right)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

On a : • $x \longmapsto \dfrac{x}{x+2}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$

Ali Douma

Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°16 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1 :

Donner les primitives de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1) $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$; $I = IR$.

2) $f : x \mapsto \tan x + \tan^3 x$; $I = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

3) $f : x \mapsto x\sqrt{x^2+9}$; $I = IR$.

4) $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$; $I =]0,+\infty[$.

5) $f : x \mapsto \dfrac{x+3}{(x+2)^4}$; $I =]-2,+\infty[$.

6) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$; $I =]-\infty,0[$.

7) $f : x \mapsto \cos^3 x$; $I = IR$.

8) $f : x \mapsto \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$; $I =]0,+\infty[$.

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$.

1) *Justifier que f admet une seule primitive F sur $[0,+\infty[$ qui s'annule en 0.*

2) *Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x) = F(\tan^2 x)$.*

a) *Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $G'(x) = 2\tan^2 x$.*

b) *En déduire que pour tout réel $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $G(x) = 2\tan x - 2x$.*

c) *Donner alors $F(1)$ et $F\left(\dfrac{1}{3}\right)$.*

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = x^2 - \sqrt{1-x^2}$.

1) *Soit F la primitve de f sur $[-1,1]$ qui s'annule en 0 et G la fonction définie sur $[-1,1]$ par $G(x) = F(x) + F(-x)$.*

a) *Calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $[-1,1]$.*

b) *En déduire que F est impaire.*

2) *Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $H(x) = F(\cos x) - F(\sin x)$.*

a) *Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$ pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.*

b) *En déduire que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $H(x) = x - \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{1}{3}\cos^3 x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$.*

Correction.

Cours : Primitives

F est une primitive de f $\Longleftrightarrow$ ssi f est une dérivée de F.

théorème 1. f est continue sur I alors elle admet des primitives sur I

théorème 2 : Soit f une fonction continue sur I et a un réel de I (unique) Il existe une prim de f tel que $F(a)=b$

théorème 3 :

Si F et G ont deux primitives sur I de f et g alors $\alpha F+\beta G$ est une primitive de $\alpha f+\beta g$.

$u'u^n \to \frac{u^{n+1}}{n+1}+c$

$\frac{u'}{u^n} \to \frac{u^{-n+1}}{-n+1}+c$

$\frac{u'}{u^2} \to \frac{-1}{u}+c$

$\frac{u'}{\sqrt{u}} \to 2\sqrt{u}+c$

$u'\sqrt{u} \to \frac{2}{3}u\sqrt{u}+c$

$u'\times v'(u) \to v(u)+c$

Série d'exercices n°16

1) $F(x)=\frac{-1}{2(x^2+2x+2)}+c$

2) $f(x)=\tan x+\tan^3 x$
$=\tan x(1+\tan^2 x)$
$=\tan x\times\tan' x$

$F(x)=\frac{\tan^2 x}{2}+c$

3) $f(x)=x\sqrt{x^2+9}$

$f(x)=\frac{1}{2}\times 2x\sqrt{x^2+9}$

$=\frac{1}{2}(x^2+9)'\sqrt{x^2+9}$

$F(x)=\frac{1}{3}(x^2+9)\sqrt{x^2+9}+c$

4) $f(x)=\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

on pose $u(x)=\frac{1}{x} \to u'(x)=\frac{-1}{x^2}$

$v'(x)=\sin x \to v(x)=-\cos x$

$f(x)=-\left(\frac{-1}{x^2}\right)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

$\to$ Primitive F de f de $]0;+\infty[$

$F(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)+c$

5) $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^4}$

$=\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^4}$

$\to$ une primitive F de f sur $]-2;+\infty[$

$F(x)=\frac{-1}{2(x+2)^2}-\frac{1}{3(x+2)^3}+c$

6) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}}}$

$= \dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{-2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

une primitive F de f sur $]-\infty, 0[$ est.

$F(x) = -\sqrt{x^2+1} + C$

7) $f(x) = \cos^3 x$

$= \cos x\,(\cos^2 x)$

$= \cos x\,(1-\sin^2 x)$

$= \cos x - \cos x \sin^2 x$

$= \sin' x - (\sin' x \times \sin^2 x)$

une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

est $F(x) = \sin x - \dfrac{\sin^3 x}{3} + C$

8) $f(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

$= \dfrac{1}{2x^{3/2}} = \dfrac{1}{2} x^{-3/2}$

$F(x) = -x^{-1/2} + C$

$= \dfrac{-1}{\sqrt{x}} + C$

• $f(x) = \tan^2 x$

$= -1 + 1 + \tan^2 x$

une primitive F de f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

est $F(x) = -x + \tan x + C$

• $f(x) = \cos^2 x$

$= \dfrac{1+\cos 2x}{2}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos 2x$

une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est

$F(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin(2x) + C$

• $f(x) = \sin^2 x$

$= \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 2x$

une primitive F sur $\mathbb{R}$ de f est:

$F(x) = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + C$

• $f(x) = \sin^5 x = \sin x\,(\sin^2 x)^2$

$= \sin x\,(1-\cos^2 x)^2$

$= \sin x\,(1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x)$

$= \sin x - 2\sin x \cos^2 x + \sin x \cos^4 x$

$F(x) = -\cos x + \dfrac{2}{3}\cos^3 x - \dfrac{\cos^5 x}{5} + C$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$

Formules d'Euler

$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

• $f(x) = \cos^4 x$

$= \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)^4$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4ix} + 4e^{3ix}\cdot e^{-ix} + 6e^{2ix}\cdot e^{-2ix} + 4e^{ix}\cdot e^{-3ix} + e^{-4ix}\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4(e^{2ix} + e^{-2ix}) + 6\right)$

$= \dfrac{1}{16}\left(2\cos 4x + 8\cos 2x + 6\right)$

$= \dfrac{1}{8}\cos 4x + \dfrac{1}{2}\cos 2x + \dfrac{3}{8}$

une primitive F de f sur $\mathbb{R}$

$F(x) = \dfrac{1}{32}\sin 4x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + \dfrac{3}{8}x + C$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$

$\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$

• $f(x) = \cos 4x \cdot \cos x$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 5x + \cos 3x)$

$= \dfrac{1}{2}\cos 5x + \dfrac{1}{2}\cos 3x$

$F(x) = \dfrac{1}{10}\sin 5x + \dfrac{1}{6}\sin 3x + C$

• $f(x) = \sin 2x \sin 3x$

$= \dfrac{1}{2}\left[\cos x - \cos 5x\right]$

$F(x) = \dfrac{1}{2}\sin x - \dfrac{1}{10}\sin 5x + C$

• $f(x) = \sin 3x \cdot \cos x$

$= \dfrac{1}{2}\left[\sin 4x + \sin 2x\right]$

$= \dfrac{1}{2}\sin 4x + \dfrac{1}{2}\sin 2x$

$F(x) = -\dfrac{1}{8}\cos 4x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + C$

• $f(x) = a\cos x + b\sin x$

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \dfrac{a}{r}\\[2mm] \sin\varphi = \dfrac{b}{r}\end{array}\right\}\ \varphi ?$

$f(x) = r\cos(x - \varphi)$

✲ $f(x) = \sqrt{x^2+4}$

f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle admet une seule primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$

on pose $g(x) = F(x) + (-) F(-x)$

(Montrer qu'elle est paire ou impaire ?) on dérive $g(x)$ ($= 0$ puis on cherche la const ($= 0$)).

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ (primitive de f sur $\mathbb{R}$)

la fonction qui : $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $F(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Par suite : $f(x) = F(x) + F(-x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

et on a : $f'(x) = (F(x))' + (F(-x))'$

$= F'(x) - F(-x)$

$= f(x) - f(-x)$ (f est paire)

$= 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = 0$

or $f(0) = 2F(0)$

$f(0) = 0$

donc $f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$F(x) + F(-x) = 0$ d'où

$F(x) = -F(-x)$

$\longrightarrow$ F est impaire

exercice n° 2 :

1) $\forall x \in \mathbb{R}^+$. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

La fonction : $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

et $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ x+1 \neq 0$

donc $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$

donc elle admet des primitives et une seule primitive telle qu'elle s'annule en 0. ($F(0) = 0$).

2) a) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$; $G(x) = F(\tan^2 x)$

la fonction $U : x \mapsto \tan^2 x$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, la fonction F est dérivable sur $[0; +\infty[$ comme étant une primitive de f sur cet intervalle.

et on a $U([0; \frac{\pi}{2}[) = [0; +\infty[$

donc $G(x) = F(\tan^2 x)$ est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

et on a :

$G'(x) = (\tan^2 x)' \times F'(\tan^2 x)$

$= 2(1 + \tan^2 x)\tan x \times f(\tan^2 x)$

$= 2(1 + \tan^2 x)\tan x \dfrac{\sqrt{\tan^2 x}}{\tan^2 x + 1}$

$= 2\tan x \, |\tan x|$

$= 2\tan^2 x$

(car sur $[0; \frac{\pi}{2}[$; $\tan x \geq 0$)

b) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[$; $G'(x) = 2\tan^2 x$

$G'(x) = -2 + 2(1 + \tan^2 x)$

d'où :

$G(x) = -2x + 2\tan x + C$

or $G(0) = F(\tan^2 0)$

$G(0) = F(0)$

$G(0) = 0$

d'où $-2 \times 0 + 2\tan 0 + C = 0$

$C = 0$

ainsi

$G(x) = 2\tan x - 2x$

c) $G(\frac{\pi}{4}) = F(\tan^2 \frac{\pi}{4})$

$= F(1)$

or $G(\frac{\pi}{4}) = -2 \times \frac{\pi}{4} + 2\tan\frac{\pi}{4}$

$= -\frac{\pi}{2} + 2$

d'où $F(1) = 2 - \frac{\pi}{2}$

on a $G(\frac{\pi}{6}) = F(\tan^2 \frac{\pi}{6})$

($\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$) $= F(\frac{1}{3})$

or $G(\frac{\pi}{6}) = -2 \times \frac{\pi}{6} + 2\tan\frac{\pi}{6}$

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}$

Exercice N°1

a) $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq : } x^2+x+1 \neq 0\}$

On a : $x^2+x+1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1$

$= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

donc $\forall x \in \mathbb{R}$; $x^2+x+1 \neq 0$

donc $D_f = \mathbb{R}$.

b) Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f admet au moins primitive sur $\mathbb{R}$.

Soit $F(x) = \dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ une primitive

de f sig : $F'(x) = f(x)$; $\forall x \in \mathbb{R}$.

$F'(x) = \dfrac{a(x^2+x+1) - (2x+1)(ax+b)}{(x^2+x+1)^2}$

$= \dfrac{ax^2+ax+a - (2ax^2+2bx+ax+b)}{(x^2+x+1)^2}$

exercice n°3.

1) a) $G(x) = F(x) + F(-x)$

F est dérivable sur $[-1,1]$ car c'est une primitive de f sur $[-1,1]$

$-x$ est dérivable sur $[-1,1]$

alors $F(-x)$ est dérivable sur $[-1,1]$

G est alors dérivable sur $[-1,1]$

$G'(x) = F'(x) + -F'(-x)$

$= f(x) - f(-x)$

$= x^2 - \sqrt{1-x^2} - x^2 + \sqrt{1-x^2}$

$= 0$

b) $G'(x) = 0$

d'où $F(x) + F(-x)$ est constante

$G(0) = 2F(0) = 0$

$\Rightarrow F(x) + F(-x) = 0$

$F(x) = -F(-x)$

F est alors impaire

2) a) pour $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$

$\cos x$ est dérivable et $\sin x$ est dérivable.

$\cos x$ est à valeurs dans $[0,1]$

et $\sin x$ à valeur dans $[0;1]$

$[0;1] \subset [-1,1]$

F est dérivable sur $[0,1]$

ainsi H est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$H'(x) = (F(\cos x))' - (F(\sin x))'$

$= -\sin x \, F'(\cos x) - \cos x \, F'(\sin x)$

$= -\sin x \, f(\cos x) - \cos x \, f(\sin x)$

$= -\sin x(\cos^2 x - \sqrt{\sin^2 x}) - \cos x(\sin^2 x - \sqrt{\cos^2 x})$

$= -\sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x + \sin^2 x + \cos^2 x$

$(\sin x \geq 0$ et $\cos x \geq 0)$

alors $|\sin x| = \sin x$ ...

$H'(x) = (\cos x)' \cos^2 x - (\sin x)' \sin^2 x + 1$

H est la primitive de H' sur $[0; \frac{\pi}{2}]$

$H(x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{3} + x + c$

$H(0) = F(1)$

$H(\frac{\pi}{2}) = -F(1)$

$H(0) + H(\frac{\pi}{2}) = 0$

$\frac{1}{3} + c - \frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + c = 0$

$2c = -\frac{\pi}{2}$

$c = \frac{-\pi}{4}$

d'où $H(x) = \frac{\cos^3 x}{3} - \frac{\sin^3 x}{3} + x - \frac{\pi}{4}$

pour $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$.

ou bien: $H(\frac{\pi}{4}) = 0$

$\frac{\pi}{4} + c = 0$

$c = -\frac{\pi}{4}$

Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°18 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1: Soit $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$ et F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ tel que F(0) =0 et F(1) = $\dfrac{\pi}{4}$

1) Montrer à l'aide des I.A.F que $|F(x)|\leq |x|$; $\forall x \in \mathbb{R}$

2) a) On pose $\varphi(x) = F(x) + \dfrac{1}{x}$; $x \geq 1$. Montrer que φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire que F est majorée sur $[1, +\infty[$ et qu'elle admet une limite finie l en $+\infty$.

2) Soit $g(x)= F(x) + F(\dfrac{1}{x})$; $x \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer $g'(x)$. En déduire que $g(x) =2F(1)$ et que $l=\dfrac{\pi}{2}$.

3) Montrer que F est impair puis tracer la courbe C_F de la fonction F dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) a) Montrer que l'équation F(x) =2x -1 admet une seule solution $\alpha \in]0, 2[$.

b) On considère la suite U définie par : $U_0=0$ et $U_{n+1}= 1 +F(\dfrac{1}{2}U_n)$; $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$; $U_n \in [0,2]$ et que $|U_{n+1}-2\alpha| \leq \dfrac{1}{2}|U_n-2\alpha|$. En déduire que U est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2 : Soit f la fonction définie sur $[0, \pi[$ par $f(x)=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$.

1) Dresser le tableau de variation de f et tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$. Tracer la courbe représentative de g dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

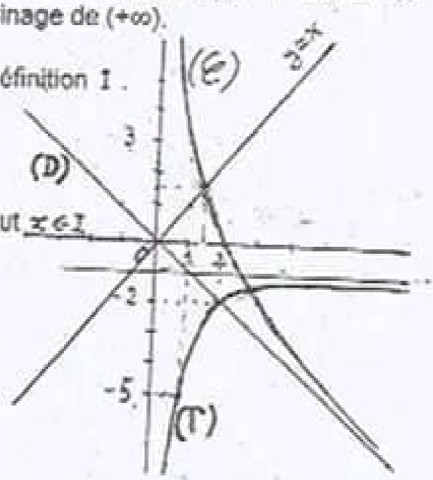
b) Montrer que g est dérivable sur$]0, +\infty[$ et que $g'(x) = \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$.

3) Pour tout entier naturel non nul n, on pose $V_n = (n^2 + n)[\,g(\dfrac{1}{n}) - g(\dfrac{1}{n+1})]$. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, il existe un réel U_n de l'intervalle $]\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}[$ tel que $V_n = \dfrac{1}{(1+U_n)\sqrt{U_n}}$. En déduire la limite de la suite (V_n).

Exercice 3 : On a représenté dans la graphique ci-contre les courbes $\mathscr{C}$ et Γ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et de sa dérivée f'. D est une asymptote oblique à C au voisinage de $(+\infty)$.

1) Reconnaître parmi $\mathscr{C}$ et Γ celle qui représente f.

2) Montrer que f admet une fonction réciproque et déterminer son ensemble de définition I. Tracer $\mathscr{C}_{f^{-1}}$.



3) a) On admet que $f'(x) = b+ \dfrac{a}{x^2}$ pour tout x>0. Déterminer a et b .

b) En déduire l'expression de f(x) pour tout x > 0 puis celle de $f^{-1}(x)$ pour tout $x\in I$.

4) On pose $g(x)= f\circ U(x)$ tel que $U(x)=\dfrac{1}{\cos x}$; $x \in [0, \dfrac{\pi}{2}[$.

a) Dresser le tableau de variation de g. En déduire que g est bijective.

b) déterminer le domaine k de dérivabilité de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'(\alpha)$

c) Tracer la courbe de g et celle de g^{-1} dans un même r.o.n $(O,\vec{i},\vec{j})$

Exercice 4 : On pose $g(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{|x|}{2\sqrt{1+x^2}}$; $x \in \mathbb{R}$

1) a) Vérifier que g est paire puis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

b) Montrer que pour tout réel x : $-\dfrac{1}{2} \leq g(x)<0$

2) a) Montrer que g admet une seule primitive f sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0)=\dfrac{3}{2}$

b) Déterminer f(x) pour tout réel x.

3) a) Dresser le tableau de variation de f sur [0, +∞[. On note h la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.
b) Montrer que que $\mathscr{C}_h$ admet ...
c) Montrer que h admet ... définition puis tracer $\mathscr{C}_h$ et ...

Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°19 4éme SC	Prof:M.Benali

Exercice 1 : I) Indiquer la seule bonne réponse pour chacune des questions suivants :

1) La fonction $x \longmapsto x + 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

a) $x \mapsto 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ b) $x \mapsto 1 - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ c) $x \mapsto 1 - \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$

2) La primitive sur $[0, \pi[$ de $x \longmapsto \cos^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)$ qui s'annule en 0 est :

a) $x \longmapsto 2\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ b) $x \longmapsto \frac{1}{2}\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ c) $x \longmapsto x + \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

II) Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse :

1) Si F est une primitive de f sur I alors F^2 est une primitive de f^2 sur I.

2) Les primitives de $x \mapsto \cos x$ qui s'annulent respectivement en 0 et en π sont égales.

3) Si f est impaire et F une primitive de f sur $\mathbb{R}$ alors F est paire.

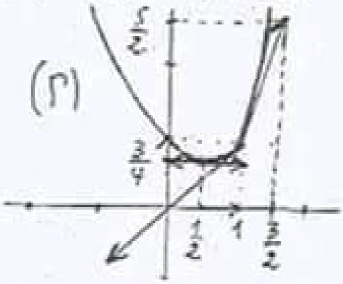
Exercice 2 : Donner une primitive de f sur I dans chacun des cas suivants.

1) $f(x) = 2x^5 - 6x^2 + \sqrt{1+2x}$; $I = \mathbb{R}$. 2) $f(x) = \frac{x}{(2x-1)^3} - \frac{x-1}{(x^2-2x)^4}$; $I =]2, +\infty[$ 3) $f(x) = x\sqrt[3]{(x^2+4)^2}$; $I = \mathbb{R}$

4) $f(x) = (x-1)(x^2-2x+3)^5$; $I = \mathbb{R}$ 5) $f(x) = \sqrt{x+2} - \frac{x}{\sqrt{x+2}}$; $I =]2, +\infty[$ 6) $f(x) = \sin^2 x + \tan^4 x$; $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

7) $f(x) = \sin x \tan^2 x$; $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ 8) $f(x) = \frac{1}{1-\sin x}$; $I = [0, \frac{\pi}{2}[$ 9) $f(x) = (1+\sqrt{x})^2 + 2x(x^2+1)^3$; $I = \mathbb{R}$.

Exercice 3 : Dans le graphique ci-contre, Γ désigne la courbe d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$. 1) Déterminer $f'\left(\frac{1}{2}\right)$; $f'_g(1)$ et $f'_d(1)$.



2) On admet que $f(x) = x^2 + |1-x|$ pour tout réel x

a) Montrer que f admet une seule primitive F tel que $F(1) = 1$.

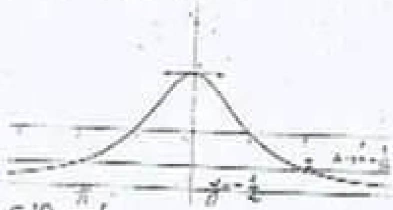
b) Déterminer $F(x)$ pour tout réel x puis dresser son tableau de variation.

3) Montrer que F admet une fonction réciproque F^{-1}. Tracer C_F et $C_{F^{-1}}$.

Exercice 4 : On a tracé dans un repère orthogonal $(o, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que f admet une unique primitive F sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$.

2) Préciser le sens de variation de F et montrer que F est impair.



3) a) Montrer que $\forall x \geq 2$, $F(x) \leq F(2) + \frac{3}{5} - \frac{3x}{10}$. Déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x)$

b) Montrer que C_F admet un point d'inflexion.

4) On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = \frac{1-x^2}{2(1+x^2)}$ et on pose $G(x) = F(\tan x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

a) Montrer que G est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$; $G(x) = x - \frac{1}{2}\tan x$. Calculer alors $F(1)$, $F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ et $F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

c) On admet que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x} = -\infty$; Tracer la courbe de F.

Exercice 5 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et f_n la fonction définie sur $]-1, 1[$ par $f_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} kx^{k-1}$

1) Montrer que f_n admet au moins une primitive sur $]-1, 1[$.

2) a) Soit F_n la primitive de f_n sur $]-1, 1[$ qui s'annule en 0. Montrer que: $F_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x}$

b) En déduire une autre expression de $f_n(x)$ pour tout $x \in]-1, 1[$

3) Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}[$ et U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{n^2}(1 + 2\tan\alpha + 3\tan^2\alpha + \dots + n\tan^{n-1}\alpha)$.

Deduire de ce qui précède $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

Prof : M.Ben Ali

Primitives

Primitive $\longleftrightarrow$ Dérivée

$$\boxed{\alpha} F \longleftrightarrow \boxed{\alpha} f \longleftrightarrow \boxed{\alpha} f' \longleftrightarrow \boxed{\alpha} f''$$

$$\boxed{c^{te}x \longleftrightarrow c^{te}}$$

$$3x \longleftrightarrow 3$$

$$-\sqrt{2}x \longleftrightarrow -\sqrt{2}$$

$$\boxed{\frac{x^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow x^n}$$

$$\frac{x^2}{2} \longleftrightarrow x$$

$$\frac{x^4}{4} \longleftrightarrow x^3$$

$$\boxed{-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \longleftrightarrow \frac{1}{x^n} \quad n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}}$$

$$-\frac{1}{2x^2} \longleftrightarrow \frac{1}{x^3}$$

$$-\frac{1}{6x^6} \longleftrightarrow \frac{1}{x^7}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}x\sqrt{x} \longleftrightarrow \sqrt{x}}$$

$$\boxed{2\sqrt{x} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\frac{2}{3}u\sqrt{u} \longleftrightarrow u'\sqrt{u}}$$

$$\frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1} \longleftrightarrow \underbrace{2x}_{u'}\sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}}$$

$$\boxed{2\sqrt{u} \longleftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{u}}}$$

$$2\sqrt{x^2+1} \longleftrightarrow \frac{\overset{u'}{2x}}{\sqrt{\underbrace{x^2+1}_{u}}}$$

$$\boxed{\frac{u^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow u'u^n}$$

$$\frac{(x^2+1)^8}{8} \longleftrightarrow \underbrace{2x}_{u'}(\underbrace{x^2+1}_{u})^7$$

$$\boxed{-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} \longleftrightarrow \frac{u'}{u^n}}$$

$$-\frac{1}{6(x^2+1)^6} \longleftrightarrow \frac{\overset{u'}{2x}}{(\underbrace{x^2+1}_{u})^7}$$

$$\boxed{u \circ v(x) \longleftrightarrow v' \times u'(v(x))}$$

$$\underbrace{\sin}_{u}(\underbrace{\ln x}_{v}) \longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'}\cos(\ln x)$$

$$x\ln x - x \longleftrightarrow \ln x$$

$$e^x \longleftrightarrow e^x$$

$$\frac{1}{a}e^{ax+b} \longleftrightarrow e^{ax+b} \quad a\neq 0$$

$$\frac{1}{2}e^{2x-1} \longleftrightarrow e^{2x-1}$$

$$\frac{(\ln x)^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow \frac{\ln^n x}{x}$$

$$\ln(\ln x) \longleftrightarrow \frac{1}{x\ln x}$$

$$\frac{(\ln x)^2}{2} \longleftrightarrow \frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{\ln^4 x}{4} \longleftrightarrow \frac{\ln^3 x}{x}$$

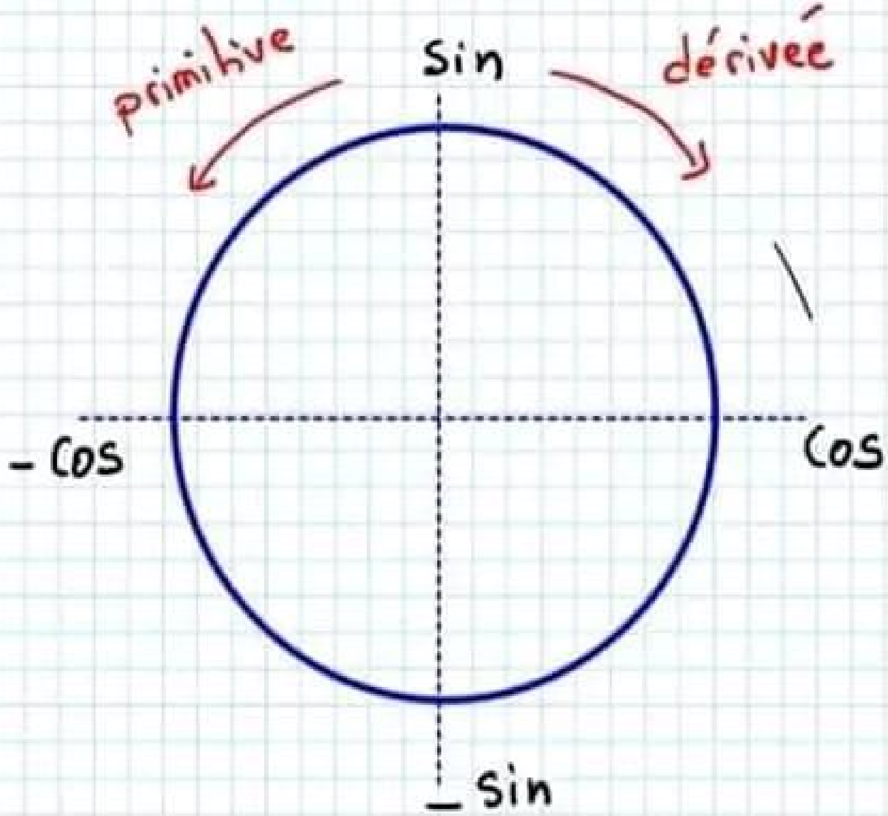
- Si f est **Continue** sur **un intervalle I**.
  alors f admet une primitive F sur I.

- F est une primitive de f sur I.
  sig F est **dérivable sur I** et $\forall x \in I$.

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

- F est **la primitive** de f sur I telque
  $F(a) = b$.

Trigonometrie.



$$\frac{1}{a}\sin(ax+b) \longleftrightarrow \cos(ax+b)$$

$$-\frac{1}{a}\cos(ax+b) \longleftrightarrow \sin(ax+b)$$

$$-\ln|\cos x| \longleftrightarrow \tan x \longleftrightarrow 1+\tan^2 x$$

Integral

- Calcul d'aire
- Calcul volume
- Calcul valeur moyenne.

$\int_a^b f(t)\,dt$ c'est **l'aire algebrique** de la partie du plan limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ $(a>b)$

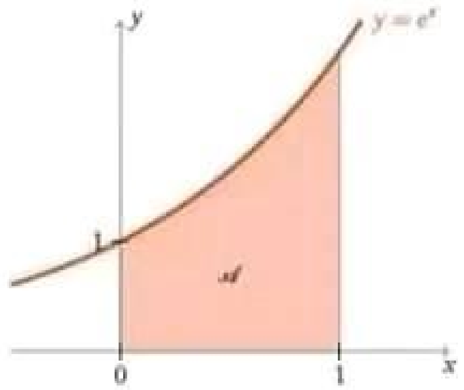
Exemples

$\mathcal{A} = \int_0^1 e^x\,dx$

primitive

$= [e^x]_0^1$

$= e^1 - e^0 = \boxed{e-1}$



$\int_1^e \ln x\,dx = [x\ln x - x]_1^e = (e\ln e - e) - (1\ln 1 - 1)$

$= 0 - (-1) =$

$$\int_1^2 x^2-3x+1\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+x\right]_1^2$$

$$= \frac{8}{3}-\frac{3}{2}\times 4+2-\left(\frac{1}{3}-\frac{3}{2}+1\right)$$

$$= \boxed{-\frac{7}{6}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\sin\pi - \frac{1}{2}\sin 0$$

$$= 0 - 0 = \boxed{0}$$

$$\int_1^e \frac{\ln^4 x}{x}\,dx = \left[\frac{\ln^5 x}{5}\right]_1^e = \frac{\ln^5 e}{5} - \frac{\ln^5 1}{5}$$

$$= \frac{1}{5} - 0$$

$$= \boxed{\frac{1}{5}}$$

Proprietes. f et g Continue sur $[a,b]$

- $\forall x \in [a,b]$; $f(x) \geq 0$ **alors** $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.
- $\forall x \in [a,b]$; $f(x) \leq 0$ **alors** $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.
- $\forall x \in [a,b]$; $f(x) \leq g(x)$ **alors** $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
- $\forall x \in [a,b]$; $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Parité - Periodicité

f est continue sur $[a,b]$

- f est paire sur $[-a,a]$; on a : $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$
- f est impaire sur $[-a,a]$; on a $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$
- si f est continue sur $\mathbb{R}$ et periodique de période T alors $\forall a \in \mathbb{R}$, $\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx$.

Exemples

- $I = \int_{-5}^{5} x^3 + x\,dx$

$= 0$

car : $f : x \longmapsto x^3 + x$ est une fonction impaire car.

$\forall x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$ et

$f(-x) = (-x)^3 + (-x) = -x^3 - x$

$= -(x^3 + x)$

$= -f(x)$

- $J = \int_{-1}^{1} t^4 + t^2 - 1\,dt$, on a $g : t \longrightarrow t^4 + t^2 - 1$ est paire

car $\forall t \in \mathbb{R}$, $(-t) \in \mathbb{R}$.

$g(-t) = (-t)^4 + (-t)^2 - 1$

$= t^4 + t^2 - 1 = g(t)$

$= \boxed{2}\int_{0}^{1} t^4 + t^2 - 1\,dt$.

- $K = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \cos 2x \, dx$

$x \longmapsto \cos 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et periodique de période $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$

$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\pi} \cos 2x \, dx.$

$= \int_{0}^{\pi} \cos 2x \, dx$

Theorème la moyenne

Si f est continue sur $[a,b]$, alors il existe un réel $c \in [a,b]$ telque $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$

- le réel $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ s'appelle la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Exemple Soit $f(x) = x^2 - 1.$

Determiner la valeur moyenne de f sur $[1,2]$

$\overline{f} = \frac{1}{2-1}\int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 x^2 - 1\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2$

$= \frac{2^3}{3} - 2 - \left(\frac{1^3}{3} - 1\right)$

$$= \frac{ax^2 + \cancel{ax} + a - 2ax^2 - 2bx - \cancel{ax} - b}{(x^2+x+1)^2}$$

donc

$$F'(x) = \frac{-ax^2 - 2bx + a - b}{(x^2+x+1)^2}$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ -2b = 2 \\ a - b = 0 \end{cases} \quad \text{sig} \quad \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$$

donc $\boxed{F(x) = \dfrac{-x-1}{x^2+x+1}}$

Exercice N°2 :

$$f(x) = \frac{4x-1}{(2x+1)^3}$$

a) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

$$f(x) = \frac{a}{(2x+1)^2} + \frac{b}{(2x+1)^3}$$

$$= \frac{a(2x+1) + b}{(2x+1)^3}$$

$$= \frac{8}{3} - 2 + \frac{2}{3}$$
$$= \frac{10}{3} - 2$$
$$= \boxed{\frac{4}{3}}$$

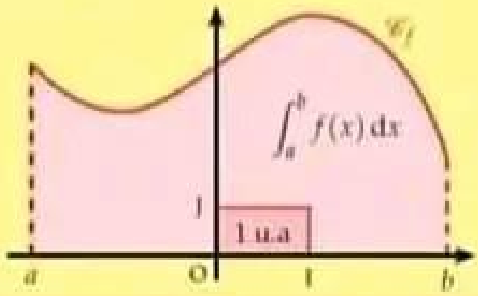
Calcul d'aire

Définition 1 : Soit f une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a\,;b]$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.
Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

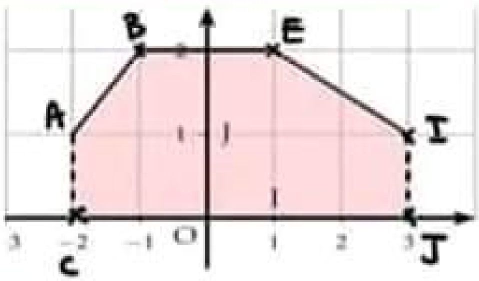
On appelle

- **Unité d'aire (u.a.)** : l'aire du rectangle bâti à partir des points O, I et J.
- **Domaine sous la courbe** : domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses, et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ $(a \leqslant b)$.
  Ce domaine est l'ensemble des point $M(x;y)$ du plan tels que :
  $$a \leqslant x \leqslant b \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x)$$
- **Intégrale de f sur $[a\,;b]$** : la mesure de l'aire en u.a. du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}_f$.
  On la note : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$



Exemple : On donne la représentation suivante d'une fonction f sur $[-2\,;3]$ ainsi que les mesures : $OI = 2$ cm et $OJ = 3$ cm. Calculer :

- L'unité d'aire.
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx$ puis l'aire en cm²



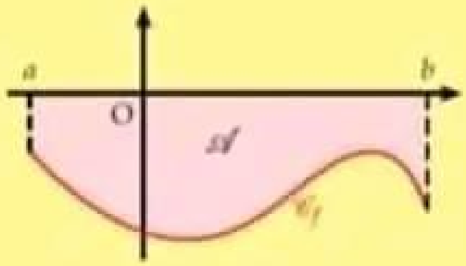
- L'unité d'aire : $\boxed{2 \times 3 = 6\ cm^2}$
- $\displaystyle\int_{-2}^{3} f(x)\,dx\ (ua) = \mathcal{A}(AIJC) + \mathcal{A}(AIEB)$
  $$= 5 \times 1 + \frac{(AI + BE) \times 1}{2}$$

$$= 5 + \frac{5+2}{2} = 5 + \frac{7}{2}\ (ua)$$
$$= \frac{17}{2} \times 6\,cm^2 = \boxed{51\,cm^2}$$

Propriete 1 : Relation entre aire et intégrale

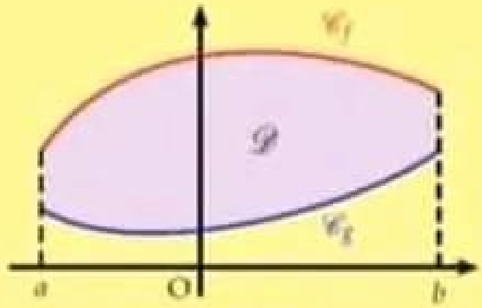
- Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ telle que $f \leqslant 0$. Soit $\mathscr{A}$ l'aire délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathscr{A} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

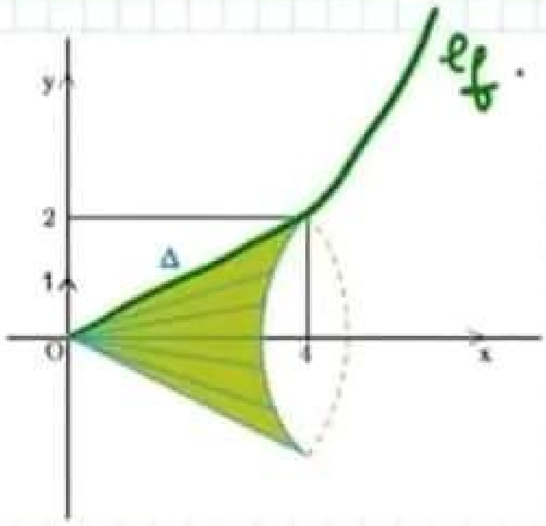


- Soient deux fonctions f et g continues sur $[a;b]$ telles que $f \geqslant g$. Soit $\mathscr{D}$ l'aire comprise entre les deux courbes et les droites $x = a$ et $x = b$. On a alors :

$$\mathscr{D} = \int_a^b (f-g)(x)\,\mathrm{d}x$$



Volume



$$V = \pi \int_0^4 f^2(x)\,dx$$

Théorème admis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ ($a < b$) et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan. On considère la partie $\mathscr{P}$ du plan limitée par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Soit V le volume du solide de révolution engendré par la rotation de la partie $\mathscr{P}$ autour de l'axe des abscisses. Alors on a : $V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx$ (unité de volume)

Integration par partie.

P : polynôme

$$\int \underbrace{P}_{u} \cdot \underbrace{\text{trigo}}_{v'} \quad \text{ou} \quad \int \underbrace{P}_{v'} \cdot \underbrace{\ln}_{u} \quad \text{ou} \quad \int \underbrace{P}_{u} \cdot \underbrace{\exp}_{v'}$$

Exemples

$$I = \int_1^e \overbrace{x}^{v'} \overbrace{\ln x}^{u} \, dx$$

posons $u(x) = \ln x \longleftrightarrow \boxed{u'(x) = \frac{1}{x}}$

$\boxed{v(x) = \frac{x^2}{2}} \longleftrightarrow v'(x) = x$

$$I = \left[u(x) \cdot v(x) \right]_1^e - \int_1^e u'(x) v(x) \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e$$

$$= \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{e^2}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} \right)$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

Primitives et Calcul d'une intégrale

I) Primitive

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On appelle primitive de f sur I, toute fonction F dérivable sur I dont la dérivée F' est égale à f.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x + 2$.

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x - 7$ et $G(x) = \frac{5}{2}x^2 + 2x + 8$ sont des primitives de f.

2) Ensemble des primitives d'une fonction :

a) Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose qu'il existe une primitive F de f sur I.
L'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions G définies sur I par $G(x) = F(x) + k$ où k décrit $\mathbb{R}$.

Preuve :

Soit G une primitive de f sur I. On a donc $G' = F' = f$.

Donc pour tout $x \in I$, on a $(G - F)'(x) = 0$.

Donc la fonction $G - F$ est constante sur l'intervalle I, il existe donc un réel k tel que pour tout $x \in I$, on a $(G - F)(x) = k$ d'où $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Réciproquement soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$.

On a $G'(x) = F'(x) + 0$ donc $G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$ donc G est une primitive de f sur I.

Remarques :

Si la fonction f admet une primitive sur un intervalle I alors elle en admet une infinité.

Soit G et F deux primitives de f sur I tels que $G(x) = F(x) + k$, alors dans un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ la courbe représentative de G est obtenue à partir de la courbe représentative de F par translation de vecteur $\vec{j}$.

b) Primitive prenant une valeur donnée en un réel donné :

Propriété :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f admet des primitives sur I. Soit x_0 et y_0 deux réels tels que $x_0 \in I$.

Il existe une unique primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$

Preuve :

La fonction f admet des primitives, soit G une primitive de f.

On considère la fonction F définie par $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$

F est aussi une primitive de f car $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

De plus on a $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$ **Donc F existe**.

Soit H une autre primitive de f vérifiant $H(x_0) = y_0$.

On sait qu'il existe un réel k tel que $H(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$.

Donc en particulier on a $H(x_0) = F(x_0) + k$ d'où $y_0 = y_0 + k$ donc $k = 0$ donc $H = F$.

La fonction F est donc bien unique.

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$

Déterminer la primitive F de f telle que $F(3) = -5$

On vérifie facilement que les primitives de f sont $F(x) = x^2 + 3x + k$, $k \in \mathbb{R}$

Si on veut $F(3) = -5$ alors $3^2 + 3 \times 3 + k = -5$ d'où $k = -23$

La primitive cherchée est donc $F(x) = x^2 + 3x - 23$

Lycée pilote Sfax

Mme Fakhfakh

Série d'exercices N° 16

151

Année scolaire : 2018/2019
Classe $4^{ème}$ sc

EXERCICE N°4

Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I dans chacun des cas suivants :

1/ $f(x)=(x^2+x+1)^3(2x+1)$, $I=\mathbb{R}$

2/ $f(x)=\dfrac{x}{(x^2+1)^2}$, $I=\mathbb{R}$.

3/ $f(x)=\dfrac{x^4+3x^3-x^2+1}{x^2}$, $I=]0,+\infty[$

4/ $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$, $I=]1,+\infty[$

5/ $f(x)=\dfrac{2\sin x}{(2+\cos x)^3}$; $I=\mathbb{R}$

6/ $f(x)=\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^3x$, $I=\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

7/ $f(x)=\dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}}$, $I=\mathbb{R}$

8/ $f(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ $I=]0,+\infty[$

EXERCICE N° 5

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$

1/ a) Montrer que f admet sur $[0,+\infty[$ une unique primitive F telle que $F(0)=0$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$, $F(x)\geq 0$.

2/ Soit G la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F(\tan^2 x)$.

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $G'(x)=\tan^2 x$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Donner l'expression de $G(x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

c) En déduire la valeur de $F(1)$.

EXERCICE N° 6

Soit la fonction f définie sur $[-1,1]$ par $f(x)=x^2-\sqrt{1-x^2}$.

1/ a) Montrer que f admet au moins une primitive sur $[-1,1]$.

b) Soit F la primitive de f sur $[-1,1]$ telle que $F(0)=0$ et G la fonction définie sur $[-1,1]$ par $G(x)=F(x)+F(-x)$.

Calculer $G'(x)$ pour tout réel x de $[-1,1]$. En déduire que F est impaire.

2/ Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par $H(x)=F(\cos x)-F(\sin x)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $H'(x)$ pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

b) En déduire que pour tout x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $H(x)=x-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{3}\cos^3 x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$

c) Calculer $F(1)$.

Lycée Pilote Sfax

Primitives

Exercice 1

1) $f(x)=x^4+\frac{1}{x^2}$; $x\in\mathbb{R}_+^*$; $F(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{1}{x}+c$; $x\in\mathbb{R}_+^*$

2) $f(x)=\frac{x+3}{(x+2)^4}=\frac{1}{(x+2)^3}+\frac{1}{(x+2)^4}$; $x\in]-2,+\infty[$; $F(x)=-\frac{1}{2(x+2)^2}-\frac{1}{3(x+2)^3}+c$; $x\in]-2,+\infty[$

3) $f(x)=-\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{1}{x}\right)^6$; $x\in\mathbb{R}_+^*$; $F(x)=\frac{1}{7}\left(1+\frac{1}{x}\right)^7+c$; $x\in\mathbb{R}_+^*$

4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}$; $x\in\mathbb{R}_+^*$; $F(x)=-\frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2}+c$; $x\in\mathbb{R}_+^*$

5) $f(x)=x\sqrt{x^2+1}$; $x\in\mathbb{R}$; $F(x)=\frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}+c$; $x\in\mathbb{R}$

6) $f(x)=\sin x\tan^2x=\sin x\left(\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\right)=\frac{\sin x}{\cos^2x}-\sin x$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $F(x)=\frac{1}{\cos x}+\cos x+c$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

7) $f(x)=-\frac{1}{x^2}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$; $x\in\mathbb{R}_+^*$; $F(x)=-\cos\left(\frac{1}{x}\right)+c$; $x\in\mathbb{R}_+^*$

8) $f(x)=x^2(x-1)^{2014}=(x-1)^{2016}+2(x-1)^{2015}+(x-1)^{2014}$; $x\in\mathbb{R}$; $F(x)=\frac{1}{2017}(x-1)^{2017}+\frac{1}{1008}(x-1)^{2016}+\frac{1}{2015}(x-1)^{2015}+c$; $x\in\mathbb{R}$

9) $f(x)=\tan^4x=\tan^2x(\tan^2x+1)-(\tan^2x+1)+1$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$; $F(x)=\frac{1}{3}\tan^3x-\tan x+x+c$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

10) $f(x)=\frac{1}{\tan^4x}+\frac{1}{\tan^2x}=\frac{1+\tan^2x}{\tan^4x}$; $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $F(x)=\frac{-1}{3\tan^3x}+c$; $x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

11) $f(x)=\sin x+\cos^2x=\sin x+\frac{1}{2}(\cos 2x+1)$; $x\in\mathbb{R}$; $F(x)=-\cos x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 2x+x\right)+c$; $x\in\mathbb{R}$

12) $f(x)=\sin^2x\cos^3x=\cos x\sin^2x-\cos x\sin^4x$; $x\in\mathbb{R}$; $F(x)=\frac{1}{3}\sin^3x-\frac{1}{5}\sin^5x+c$; $x\in\mathbb{R}$

13) $f(x)=\sin^5x=\sin x(1+\cos^4x-2\cos^2x)=\sin x-\sin x\cos^4x-2\sin x\cos^2x$; $x\in\mathbb{R}$

$F(x)=-\cos x-\frac{1}{5}\cos^5x+2\times\frac{1}{3}\cos^3x+c$; $x\in\mathbb{R}$

14) $f(x)=\sin^4x=\frac{1}{8}\cos(4x)-\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$; $x\in\mathbb{R}$; $F(x)=\frac{1}{32}\sin(4x)-\frac{1}{4}\sin(2x)+\frac{3}{8}x+c$; $x\in\mathbb{R}$.

Exercice 2

1/ a) $f(x)=x^2-\sqrt{1-x^2}$; $x\in[-1,1]$. f est continue sur $[-1,1]$ donc f admet au moins une primitive sur $[-1,1]$.

b) F la primitive de f sur $[-1,1]$, telle que $F(0)=0$ donc $F'(x)=f(x)$; $x\in[-1,1]$

$G(x)=F(x)+F(-x)$; $x\in[-1,1]$. G est dérivable sur $[-1,1]$ et on a : $G'(x)=F'(x)-F'(-x)$ $=f(x)-f(-x)$; $x\in[-1,1]$. $f(-x)=(-x)^2-\sqrt{1-(-x)^2}=x^2-\sqrt{1-x^2}=f(x)$; $\forall x\in[-1,1]$

donc $G'(x)=0$; $\forall x\in[-1,1]$. $G(0)=F(0)+F(-0)=0$ donc $G(x)=0$ $\forall x\in[-1,1]$.

d'où $F(-x)=-F(x)$; $\forall x\in[-1,1]$ et par suite F est impaire. ($x\in[-1,1]$; $-x\in[-1,1]$)

2) $H(x)=F(\cos x)-F(\sin x)$; $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

a) $x\mapsto\cos x$; $x\mapsto\sin x$ et $F : x\mapsto F(x)$ sont dérivables sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $[0,1]$

$\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\cos x\in[0,1]$ et $\sin x\in[0,1]$ donc H est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$H'(x) = -\sin x\, f(\cos x) - \cos x\, f(\sin x)$

$= -\sin x\left[\cos^2 x - \sqrt{1-\cos^2 x}\right] - \cos x\left[\sin^2 x - \sqrt{1-\sin^2 x}\right]$

$= \left[-\sin x \cos^2 x + \sin^2 x\right] - \left[\cos x \sin^2 x - \cos^2 x\right]$

$= -\sin x \cos^2 x + \sin^2 x - \cos x \sin^2 x + \cos^2 x$

$= 1 - \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x\ ;\quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

b) $H'(x) = 1 - \sin x \cos^2 x - \cos x \sin^2 x\ ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

donc $H(x) = x + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c.\quad x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$H(\frac{\pi}{4}) = F(\cos(\frac{\pi}{4})) - F(\sin(\frac{\pi}{4})) = F(\frac{\sqrt{2}}{2}) - F(\frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$

donc $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 - \frac{1}{3}(\frac{\sqrt{2}}{2})^3 + c = 0$ Soit $c = -\frac{\pi}{4}$.

$H(x) = x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\cos^3 x - \frac{1}{3}\sin^3 x\ ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

c) $H(0) = F(\cos(0)) - F(\sin 0) = F(1) - F(0) = F(1)$

$H(0) = 0 - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\cos^3 0 - \frac{1}{3}\sin^3 0 = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$ donc $F(1) = \frac{4-3\pi}{12}$

Exercice 3

$f(x) = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}\ ;\ x \in [0, 2[$

1) f est dérivable sur $[0,2[$ et $f'(x) = \dfrac{-2 \times \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}}{\sqrt{4-x^2}^{\,2}} = \dfrac{2x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}\ ;\ x \in [0, 2[$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1\ ;\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$

x	0		2
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) a) $x \mapsto 2\sin x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $2\sin x \in [0, 2[$ pour tout $x \in [0, 2[$

F est la primitive de f sur $[0,2[$ qui s'annule en 0 donc $F'(x) = f(x)$; $x \in [0,2[$ et $F(0) = 0$. F est dérivable sur $[0,2[$.

d'où $G(x) = F(2\sin x)$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

$G'(x) = F'(2\sin x) \times 2\cos x = f(2\sin x) \times 2\cos x = \frac{2}{\sqrt{4 - 4\sin^2 x}} \times 2\cos x = \frac{4\cos x}{\sqrt{4\cos^2 x}}$

$= \frac{4\cos x}{2\cos x} = 2\ ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ car $|\cos x| = \cos x\ ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

b) $G'(x) = 2\ ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ donc $G(x) = 2x + C$. Comme $F(0) = 0$ donc $C = 0$

Soit $G(x) = 2x \,;\, x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

Exercice N° 4

1) $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^3 \,;\, x \in \mathbb{R}$. $F(x) = \frac{1}{4}(x^2+x+1)^4 + C \,;\, x \in \mathbb{R}$

2) $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2} \,;\, x \in \mathbb{R}$. $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+1)} + C \,;\, x \in \mathbb{R}$

3) $f(x) = \dfrac{x^4+3x^3-x^2+1}{x^2} = x^2+3x-1+\dfrac{1}{x^2} \,;\, x \in]0,+\infty[\,;\, F(x) = \frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x-\frac{1}{x}+C \,;\, x \in]0,+\infty[$

4) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x-1}} = 2\sqrt{x-1}+\dfrac{3}{\sqrt{x-1}} \,;\, x \in]1,+\infty[\,;\, F(x) = \dfrac{4\sqrt{(x-1)^3}}{3}+6\sqrt{x-1}+C \,;\, x \in]1,+\infty[$

5) $f(x) = \dfrac{2\sin x}{(2+\cos x)^3} = -2 \times \dfrac{-\sin x}{(2+\cos x)^3} \,;\, x \in \mathbb{R} ,\, F(x) = \dfrac{1}{(2+\cos x)^2} + C \,;\, x \in \mathbb{R}$

6) $f(x) = \tan x + \tan^3 x = (1+\tan^2 x)\tan x \,;\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\,;\, F(x) = \frac{1}{2}\tan^2 x + C \,;\, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

7) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}} \,;\, x \in \mathbb{R}$; $F(x) = 2\sqrt{2+\sin x} + C \,;\, x \in \mathbb{R}$

8) $f(x) = \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{x^2} \,;\, x \in]0,+\infty[\,;\, F(x) = \cos(\frac{1}{x}) \,;\, x \in]0,+\infty[$.

Exercice 5

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{2(1+x)} \,;\, x \in [0,+\infty[$

1) a) f est continue sur $[0,+\infty[$ donc f admet une unique primitive F sur $[0,+\infty[$ telle $F(0)=0$

b) $F'(x) = f(x) \geq 0$, F est croissante sur $[0,+\infty[$ donc $\forall x \geq 0 ; F(x) \geq F(0) = 0$

2) a) $x \mapsto \tan^2 x$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$; $\tan^2 x \in [0,+\infty[; \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ donc $x \mapsto G(x) = F(\tan^2 x)$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$. $G'(x) = 2\tan x \times (1+\tan^2 x) \times F'(\tan^2 x)$

$= 2\tan x(1+\tan^2 x) f(\tan^2 x) = 2\tan x(1+\tan^2 x) \times \dfrac{\sqrt{\tan^2 x}}{2(1+\tan^2 x)} = \tan^2 x$

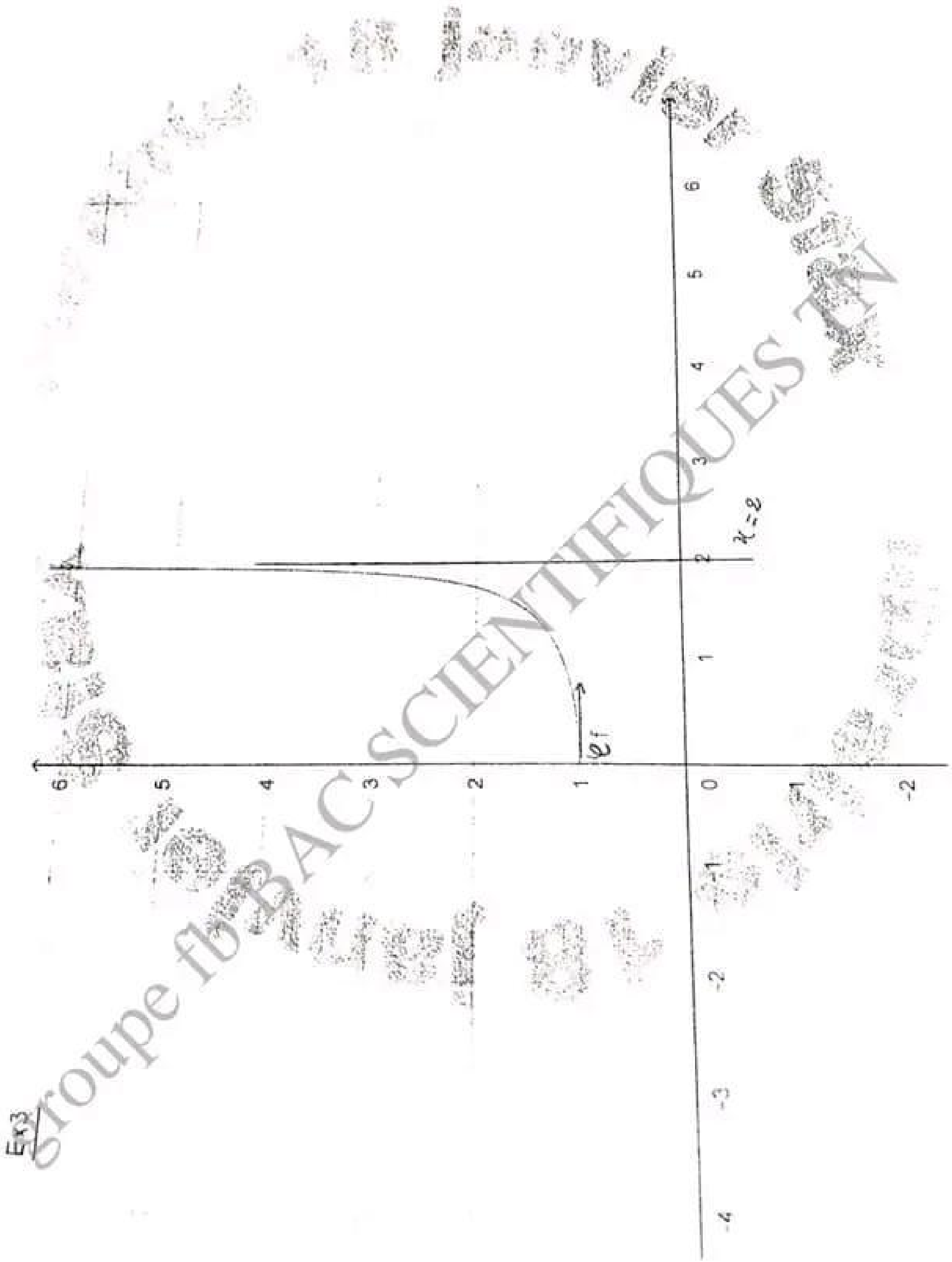
pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ car $\sqrt{\tan^2 x} = \tan x \geq 0$

b) $G'(x) = \tan^2 x + 1 - 1$ donc $G(x) = \tan x - x + C \,;\, x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

$G(0) = F(\tan^2 0) = F(0) = 0$ donc $C = 0$. Soit $G(x) = \tan x - x \,;\, x \in [0, \frac{\pi}{2}[$

c) $G(\frac{\pi}{4}) = F(\tan^2(\frac{\pi}{4})) = F(1)$; $G(\frac{\pi}{4}) = \tan(\frac{\pi}{4}) - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}$ d'où $F(1) = 1 - \frac{\pi}{4}$

Exercice 6 = **Exercice 2**


Ex3
x = e
$\mathcal{C}_f$

$$= \frac{2ax + a + b}{(2x+1)^3}$$

$$= \frac{4x - 1}{(2x+1)^3}$$

sig : $\begin{cases} 2a = 4 \\ a + b = -1 \end{cases}$ sig $\begin{cases} a = 2 \\ b = -3 \end{cases}$

donc $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$; $f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(2x+1)^3}$

b) Soit $x \in \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

On a : $f(x) = \frac{2}{(2x+1)^2} - \frac{3}{(2x+1)^3}$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\underbrace{(2x+1)^2}_{u}} - \frac{3 \times 1}{2} \frac{2}{(\underbrace{2x+1}_{u})^3}$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2} - \frac{3}{2} \frac{u'}{u^3}$$

Ali Douma

تلخيص درس Primitive

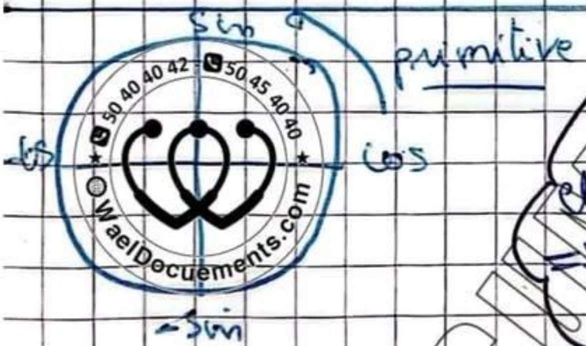
- Une fn ct sur I possède des primitives sur I.

primitive usuelles

f	I	F
a	$\mathbb{R}$	$ax + cte$
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + cte$
$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x} + cte$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$	$\sqrt{x} + cte$
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{2}{3} x\sqrt{x} + cte$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + cte$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b) + cte$
$1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}_{k \in \mathbb{Z}}$	$\tan x + cte$
$1 + \cot^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$	$-\cot g\, x + cte$

f	F
u'	$u + cte$
$u'.v + u.v'$	$u.v + cte$
$u' + v'$	$u + v + cte$
$(\alpha u)'$	$\alpha u + cte$
$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	$\frac{u}{v} + cte$

$u' v'(u)$	$v \circ u + cte$
$u' u^n \quad n \in \mathbb{Z}^* / \{-1\}$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1} + cte$
$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$\sqrt{u} + cte$
$u' \sqrt{u}$	$\frac{2}{3} u \sqrt{u} + cte$
$\frac{1}{u'(u^{-1})}$	$u^{-1} + cte$
$\frac{u'}{u^n}$	$\frac{1}{(n-1)\, u^{n-1}}$



Rq !! : Q : justifier l'unicité et l'existence de F tq $F(0)=0$.
$\Rightarrow$ Rep : on justifie la continuité et comme on a $F(0)=0$ donc F est unique.

Théorème : soit f une fn ct sur I alors $\exists!$ primitive F de f sur I qui prend y_0 en x_0 (c'est pour déterminer la cte).

Intégral :

Soit f une fn ct sur $[a,b]$ et F est une primitive de f sur $[a,b]$ on appelle donc intégral de f sur $[a,b]$ le réel

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

P_1 : $\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt$.

P_2 : $\int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \int_a^b f(t)\,dt$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

P_3 : $\int_a^b f(t)+g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$.

(il doit être les m̃ bornes a et b).

P_4 : $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$, $c \in [a,b]$

P_5 : $\int_a^a f(t)\,dt = 0$.

Rq : $\int f.g \neq \int f \cdot \int g$

$\int \frac{f}{g} \neq \int f \cdot \frac{1}{\int g}$

- Intégrales et inégalités :

① f est ct sur $[a,b]$; $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ $\Big\}$ $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

② si f une fn ct sur $[a,b]$

alors $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

- f et g 2 fn ct sur $[a,b]$; $\forall x \in [a,b]$ $g(x) \leq f(x)$ $\Big\}$ $\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx$

- Integration par partie :

Soit f et g 2 fn ct sur $[a,b]$ et f' et g' 2 fn ct sur $[a,b]$

alors $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b g'(t)f(t)\,dt$

valeur moyenne et inégalité de la moyenne :

$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$, $a<b$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Th : f est ct sur $[a,b]$, $\exists$ 2 réels m et M tq $\forall x \in [a,b]$: $m \le f(x) \le M$ alors $m \le \bar{f} \le M$

corollaire : soit f une fn ct sur $[a,b]$, alors $\exists c \in [a,b]$ tq $\bar{f} = f(c)$.

Fn définie sur un intervalle :

Th : $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est définie sur I si $\begin{cases} f \text{ est ct sur } I \\ a \in I \end{cases}$

Rq : F est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

$\Rightarrow F$ est dr sur I et on a $F'(x) = f(x)$

Th **** : Soit f ct sur I.

u une fn dr sur J.

$u(J) \subset I$

$a \in I$

$\Rightarrow F : x \mapsto \int_a^{u(x)} f(t)\,dt$ est dr sur J et on a $F'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$

Rq : on peut aussi utiliser avec le théorème de composé :

$F(x) = G(u(x))$

Th: Soit f une fn ct sur I centrée en 0 alors

① si f est pair : $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 2\int_0^x f(t)\,dt$.

② si f est impair : $\int_{-x}^{x} f(t)\,dt = 0$.

Th: Soit f ct sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T alors $\forall a \in \mathbb{R}$ on a : $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$.

+ L'aire d'une surface plane :

$A = \int_a^b |f(x)|\,dx$ est l'aire de la partie du plan par C_f et l'axe des abscisses et les droites d'éq $x=a$ et $x=b$.

$A = \int_a^b |f(x)-g(x)|$: l'aire de la partie du plan par C_f et C_g et les droites $x=a$ et $x=b$

Le volume des solides de révolutions :

$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$.

$V(S) = \dfrac{4\pi R^3}{3}$ S : sphère

Rq ! : Mq f est une cercle : $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (exemple)

$M(x,y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1-x^2} \\ y \geq 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ x \in [-1,1] \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x \in [-1,1] \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$\mathcal{C}_g$: demi cercle de centre O et de rayon 1 situé au dessus de $[O, \vec{i})$.

- l'aire d'une cercle : $\mathcal{A} = \pi R^2$.

eq° différentielle :

- (E) : $y' = ay$: les sol° de (E) sont les f° dv sur $\mathbb{R}$ et définie par : $f(x) = ke^{ax}$, $k \in \mathbb{R}$. ⚠ Pondoit l'écrire !

- (E) : $y' = ay + b$: les sol° de (E) sont les f° dv sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$.

- $w \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble des sol° de l'éq° diff $y'' + w^2 y = 0$ sont les f° dv sur $\mathbb{R}$ et définies par : $f(x) = a\sin(wx) + b\cos(wx)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Rappel méthodes: ①

Définition:

Soient f et F deux fonction définis sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

la fonction F est une primitive de f si

F derivable sur I

et $\forall x \in I, F'(x) = f(x)$

Conséquence:

Si la fonction F est une primitive de f sur I

alors Fonction $x \mapsto F(x) + k \ (k \in \mathbb{R})$

est aussi une primitive de f sur I.

Primitive d'une fonction continue.

Théorème:

Toute fonction continue sur un intervalle I, admet au moins une primitive sur I.

Exemple:

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-x}{\sqrt{3-x^2}}$

1) Justifier l'existance de fonction primitives de f sur $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$.

2) Vérifier que la fonction $F : x \mapsto \sqrt{3-x^2} + 2022$ est une primitive de f sur $]-\sqrt{3}, \sqrt{3}[$

Solution:

1) $x \mapsto 3-x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme étant une fonction polynôme) et en particulier continue et strictement positive sur $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$

d'où $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3-x^2}}$ l'est aussi.

de plus $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$ (comme étant une fonction polynôme) et en particulier continue sur $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.

Ainsi f est continue sur $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$ d'où l'existance de fonction primitive de f sur $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.

2) $x \mapsto 3-x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme étant une fonction polynôme) et en particulier dérivable et strictement positive sur $]\sqrt{3},\sqrt{3}[$ d'où

$x \mapsto \sqrt{3-x^2}$ est dérivable sur $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.

rappel:

f dérivable sur I et $\forall x\in I$; $f(x)>0$ alors $\sqrt{f}$ est dérivable sur I.

Ainsi F est dérivable sur $]-\sqrt{3},\sqrt{3}[$.

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$F'(x) = \frac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{3-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{3-x^2}} = f(x)$$

d'où F est une primitive de f.

③

Théorème :

Si f une fonction continue sur un intervalle I, alors admet une seule primitive prenant une valeur donnée en un point donnée de I.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3x^2+2x$

Determiner la primitive de f qui prend la valeur -2 au point $x_0=1$.

Solution :

$x \mapsto 3x^2+2x$ est une fonction polynôme donc il est continue sur $\mathbb{R}$ d'où l'existance de fonctions primitive de f sur $\mathbb{R}$.

$$F(x)=\cancel{3}\times\frac{1}{\cancel{3}}x^3+\cancel{2}\times\frac{1}{\cancel{2}}x^2+k$$

$$F(x)=x^3+x^2+k$$

rappel

- $\int \alpha f+\beta g=\alpha\int f+\beta\int g$
- $\int x^n=\frac{1}{n+1}x^{n+1}$

or $F(1)=-2$ sig $1^3+1^2+k=-2$

sig $\boxed{k=-4}$

La primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur -2 au point x_0 est $F: x \mapsto x^3+x^2-4$.

Calcul de primitive:

① $f(x) = a \longrightarrow F(x) = ax + k$

Exp: $f(x) = 5 \longrightarrow F(x) = 5x + k$

② $f(x) = x \longrightarrow F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$

③ $f(x) = ax \longrightarrow F(x) = \frac{a}{2}x^2 + k$

Exp:

$f(x) = 5x \longrightarrow F(x) = \frac{5}{2}x^2 + k$

④ $f(x) = x^n \longrightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$

⑤ $f(x) = ax^n \longrightarrow F(x) = \frac{a}{n+1}x^{n+1} + k$

Exp:

$f(x) = 5x^5 \longrightarrow F(x) = \frac{5}{6}x^6 + k$

⑥ $f(x) = \frac{1}{x^n} \xrightarrow{(n \geq 2)} F(x) = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k$

⑦ $f(x) = \frac{a}{x^n} \xrightarrow{n \geq 2} F(x) = \frac{-a}{(n-1)x^{n-1}} + k$

Exp: $f(x) = \frac{5}{x^5} \longrightarrow F(x) = \frac{-5}{4x^4} + k$

⑧ $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \longrightarrow F(x) = 2\sqrt{x} + k$

⑨ $f(x) = \sqrt{x} \longrightarrow F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + k$

donc $F(x) = -\dfrac{1}{u(x)} - \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{\underbrace{-3+1}_{-2}} \times \dfrac{1}{u(x)^2}$

$= -\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{(2x+1)^2}$

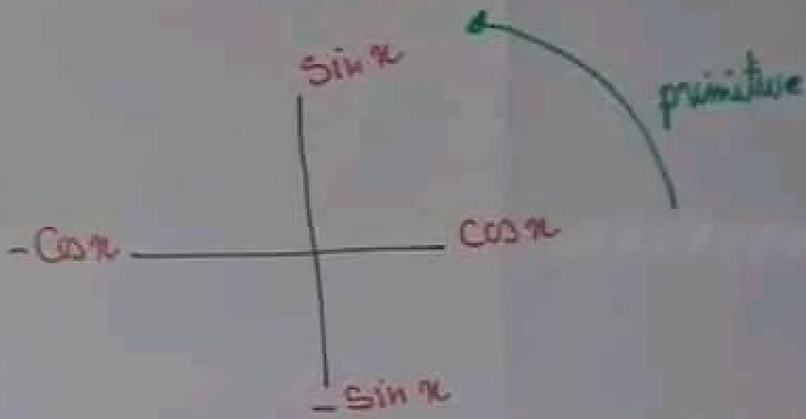
$$\boxed{F(x) = -\dfrac{1}{2x+1} + \dfrac{3}{4(2x+1)^2} + C}$$

f	F (primitive)
$\dfrac{u'}{u^2}$	$-\dfrac{1}{u}$
$\dfrac{u'}{u^3}$	$-\dfrac{1}{2u^2}$
$\dfrac{u'}{u^n}$	$\dfrac{1}{-n+1}\, u^{-n+1}$

④

⑩ $f(x) = \sin x \longrightarrow F(x) = -\cos x + k$ ⑤

⑪ $f(x) = \cos x \longrightarrow F(x) = \sin x + k$



⑫ $f(x) = 1 + \tan^2 x \longrightarrow F(x) = \tan x + k.$

⑬ $f(x) = \sin(ax+b) \longrightarrow F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$

Exp:

$f(x) = \sin(5x+7) \longrightarrow F(x) = -\frac{1}{5}\cos(5x+7) + k.$

⑭ $f(x) = \cos(ax+b) \longrightarrow F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k.$

Exp:

$f(x) = \cos(5x+4) \longrightarrow F(x) = \frac{1}{5}\sin(5x+4) + k$

① Primitive de la somme :

$$\int(\alpha f + \beta g) = \alpha\int f + \beta\int g$$

Exp

$f(x) = 5x^5 + 3x^3 + 1 \longrightarrow F(x) = \frac{5}{6}x^6 + \frac{3}{4}x^4 + x + k$

⑤ ⑥

+k.

-b)+k

7)+k.

)+k.

x+7)+k

$'+x+k$

② Primitive de $f'f^n$:

$$\int f' \times f^n \longrightarrow \frac{1}{n+1} f^{n+1}$$

Exp ① $f(x) = 2x\,(x^2+1)^5$

$$= (x^2+1)'\,(x^2+1)^5$$

$$F(x) = \frac{1}{6}(x^2+1)^6 + k$$

$u(x) = x^2+1$

$f(x) = u'(x) \times u^5(x)$

$\int f = \frac{1}{6}\,u^6(x)$

Exp ② $f(x) = 5x^3\,(x^4+1)^7$

$$= \frac{5}{4} \times \underline{4x^3}\,(x^4+1)^7$$

$$= \frac{5}{4}\,(x^4+1)' \times (x^4+1)^7$$

$$F(x) = \frac{5}{4} \times \frac{1}{8}(x^4+1)^8 + k$$

$$F(x) = \frac{5}{32}(x^4+1)^8 + k$$

③ Primitive $\frac{f'}{f^n}$ $(n \geq 2)$.

$$\int \frac{f'}{f^n} \longrightarrow \frac{-1}{(n-1)\,f^{n-1}}$$

Exp ① $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$

$$= \frac{(x+1)'}{(x+1)^3}$$

$$F(x) = \frac{-1}{2(x+1)^2} + k$$

Exp

⑪

Exp ② $f(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+1)^5}$ ⑦

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2x+2}{(x^2+2x+1)^5}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{-1}{4(x^2+2x+1)^4} + k$

$F(x) = \dfrac{-1}{8(x^2+2x+1)^4} + k$

④ Primitive de $\dfrac{f'}{\sqrt{f}}$

$$\int \frac{f'}{\sqrt{f}} = 2\sqrt{f} + k.$$

Exp ① $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+5}}$

$= \dfrac{(x+5)'}{\sqrt{x+5}}$

$\Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x+5} + k.$

Exp ② $f(x) = \dfrac{-5x}{\sqrt{x^2-3}}$

$= -\dfrac{5}{2} \times \dfrac{2x}{\sqrt{x^2-3}}$

$= \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{(x^2-3)'}{\sqrt{x^2-3}}$

$F(x) = -\dfrac{5}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{x^2-3} + k$

$\Rightarrow F(x) = -5\sqrt{x^2-3} + k.$

⑤ Primitive $f'\sqrt{f}$

$$\int f'\sqrt{f} = \frac{2}{3} f\sqrt{f}$$

Exp:

$$f(x) = 2x\sqrt{x^2+1}$$
$$= (x^2+1)'\sqrt{x^2+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}(x^2+1)\sqrt{x^2+1}$$

⑧ Ex

Integrale:

Définition de l'integrale d'une fonction continue:

Définition:

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit F une primitive de f sur I, pour tous réels a et b de I, le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant de choix de la primitive F.

On appelle integrale de f de a et b et on le note $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b$

Exemple:

1 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt = \left[-\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\Big(\underbrace{\cos \tfrac{\pi}{2}}_{0} - \underbrace{\cos 0}_{1}\Big) = 1.$$

primitive de $\sin t$

$-\cos t$

2 Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\, dx = \left[\tan x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\tan \tfrac{\pi}{4}}_{1} - \underbrace{\tan 0}_{0} = 1.$$

primitive de $1+\tan^2 x$

$\tan x$

Conséquence:

1 $\int_a^a f(x)\, dx = 0$

2 $\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx.$

Propriétés de l'intégrale:

1- Relation de Chasles:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

2- Linéarité de l'intégrale.

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, d$$

Exe

(9)

Exemple: (10)

Soit f, la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\overbrace{\sin\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{2}/2} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right) - \left(\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0} - \overbrace{\cos\frac{\pi}{4}}^{\sqrt{2}/2}\right)$$

$$= \sqrt{2}$$

Méthode d'intégration

① Explicité une primitive

C'est la méthode qui consiste à déterminer une primitive F de la fonction f qu'on cherche à intégrer.

Une telle méthode utilise la définition.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Exemple:

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \underbrace{\tan\frac{\pi}{4}}_{1} - \underbrace{\tan 0}_{0} = 1.$$

② Décomposition en élément simple:

Dans d'autre cas on se ramène à décomposer la fonction f en une combinaison linéaire de fonction élémentaires c'est à dire qu'on écrit f sous forme suivante:

$$f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_i g_i$$

où α_i : sont des constants réels.

g_i : sont des fonctions dont on connait les primitives

Dans ce cas:

$$F = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \dots + \alpha_n G_n$$

est une primitive de f.

Exemple:

$$A = \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 x\, dx + 2\int_1^2 1\, dx - 3\int_1^2 \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}x^2\right]_1^2 + 2\left[x\right]_1^2 - 3\left[-\tfrac{1}{x}\right]_1^2 = 2$$

$$\boxed{A = 2}$$

③ Linéarisation des fonctions trigonométriques. (12)

C'est la méthode qui consiste à transformer les produits en sommes.

On peut utiliser les formules trigonométriques ou simplement les formules d'Euler.

Exemple:

$$\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos 2x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\pi + \overbrace{\frac{1}{2}\sin 2\pi}^{0}\right) - \left(0 + \overbrace{\frac{1}{2}\sin 0}^{0}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

(12)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$ (13)

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2x) \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} - \overbrace{\frac{1}{2} \sin \pi}^{0} \right) - \left(0 - \overbrace{\frac{1}{2} \sin 0}^{0} \right) \right]$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$e^{i\Delta} + e^{-i\Delta} = 2\cos\Delta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx$$

Remarque:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

$$\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right) = \cos x$$

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3$$

$$= \frac{1}{8} \left((e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2 (e^{-ix}) + 3(e^{ix})(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3 \right)$$

$$= \frac{1}{8} \left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x} \right)$$

⑬ ⑭

$$= \frac{1}{8}\left[\left(e^{i3x} + e^{-i3x}\right) + 3\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3x + 3 \times 2\cos x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2\cos 3x + 6\cos x\right)$$

$$= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x.$$

$$\Rightarrow \cos^3 x = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \, dx + \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{4}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{12}\left(\overbrace{\sin\frac{3\pi}{2}}^{-1} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right) + \frac{3}{4}\left(\overbrace{\sin\frac{\pi}{2}}^{1} - \overbrace{\sin 0}^{0}\right)$$

$$= \frac{-1}{12} + \frac{3 \times 3}{4 \times 3} \qquad \frac{8 \div 4}{12 \div 4} = \frac{2}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

Exercice N°3

$$f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{1}{2x+1}}$$

1°) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } 2x+1 > 0\}$

$=]-\frac{1}{2}; +\infty[$

$$f(x) = a\sqrt{2x+1} + \frac{b}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{a(2x+1)+b}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2ax+a+b}{\sqrt{2x+1}}$$

$$= (2ax+a+b) \times \sqrt{\frac{1}{2x+1}}$$

$$= (x-1)\sqrt{\frac{1}{2x+1}} \quad \forall x \in]-\tfrac{1}{2}; +\infty[$$

sig : $\begin{cases} 2a = 1 \\ a+b = -1 \end{cases}$ sig : $\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{3}{2} \end{cases}$

16

$$C = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+3}}\,dx = \left[2x\sqrt{x+3}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{x+3}\,dx$$ 17

$$= [4-0] - 2\left[\frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3}\right]_0^1$$

$$\int f'\sqrt{f} = \frac{2}{3} f\sqrt{f}$$

$$= 4 - \frac{4}{3}\left[8 - 3\sqrt{3}\right]$$

$$= 4 - \frac{32}{3} + \frac{12}{3}\sqrt{3}$$

$$= \frac{-20 + 12\sqrt{3}}{3}$$

Retenons :

1. $f(x) = \text{Poly} \times \cos x$

$U(x) = \text{Poly} \longrightarrow U'(x)$

$V'(x) = \cos x \longrightarrow V(x)$

2. $f(x) = \text{Poly} \times \sin x$

$U(x) = \text{Poly} \longrightarrow U'(x) =$

$V'(x) = \sin x \longrightarrow V(x) =$

3. $f(x) = \text{Poly} \times \sqrt{\text{Poly}}$ ou $\dfrac{\text{Poly}}{\sqrt{\text{Poly}}}$

$U(x) = \text{Poly} \longrightarrow U'(x) =$

$V'(x) = \sqrt{\text{Poly}} \longrightarrow V(x) =$

17 18

Exercice :

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$

1 - Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) Etudier les variations de f sur $[0,1]$.

b) En déduire que $\frac{1}{2} \leq I_0 \leq 1$.

2 - a) montrer que la suite (I_n) est minorée par 0.

b) montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

3 - a) montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Solution :

1 - $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

a) f dérivable sur $[0,1]$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$$

x	0		1
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

$f(0) = 1$ et $f(1) = \frac{1}{2}$

b) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\, dx$

on $\forall x \in [0,1]$ on a $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

sig $\int_0^1 \frac{1}{2}\, dx \leq \int_0^1 f(x)\, dx \leq \int_0^1 1\, dx$

sig $\boxed{\frac{1}{2} \leq I_0 \leq 1}$

2) a) $x \in [0,1]$ sig $x^n \geq 0$ et $x^2+1 \geq 1$ sig $0 \leq \frac{x^n}{1+x^2}$

sig $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$

sig $\boxed{0 \leq I_n}$

$\Rightarrow I_n$ est minoré par 0.

b) $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}\, dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\, dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}\, dx \leq 0$

$\Rightarrow (I_n)$ est decroissante

20

c) I_n est minoré par 0

(I_n) est décroissante

$\Rightarrow$ d'où la suite (I_n) est convergente.

3) a) $x \in [0,1]$ sig $1 \leq 1+x^2 \leq 2$

sig $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

Or $x^n \geq 0$ sig $\frac{x^n}{2} \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$

$x \mapsto \frac{x^n}{2}$ et $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$ et $x \mapsto x^n$ sont continue sur $[0,1]$

alors $\int_0^1 \frac{x^n}{2}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx \leq \int_0^1 x^n dx$

sig $\frac{1}{2}\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx$

sig $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

sig $\frac{1}{2} \times \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

sig $\boxed{\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}}$

b) On a $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\ } = 0$

D'après le Théorème d'encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

Exercice 1

On pose : $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\,dx$

1) Calculer I + J et I – J.
2) En déduire I et J.

Exercice 2

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}; \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx; \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx.$$

1. Calcul de I

Soit la fonction f définie sur [0; 1] par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$.

a) Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.
b) En déduire la dérivée f' de f.
c) Calculer la valeur de I.

2. Calcul de J et de K

a) Sans calculer explicitement J et K, vérifier que : J + 2I = K.
b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, montrer que : $K = \sqrt{3} - J$.
c) En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 3

On pose $I_0 = \int_1^e x\,dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n\,dx$ pour tout n entier non nul.

1. Calculer I_0 et I_1. (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. Montrer que pour tout n entier $2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2$. Calculer I_2.
3. Montrer que pour tout n entier, $I_{n+1} \leq I_n$. En déduire en utilisant la relation du 2° l'encadrement suivant : $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

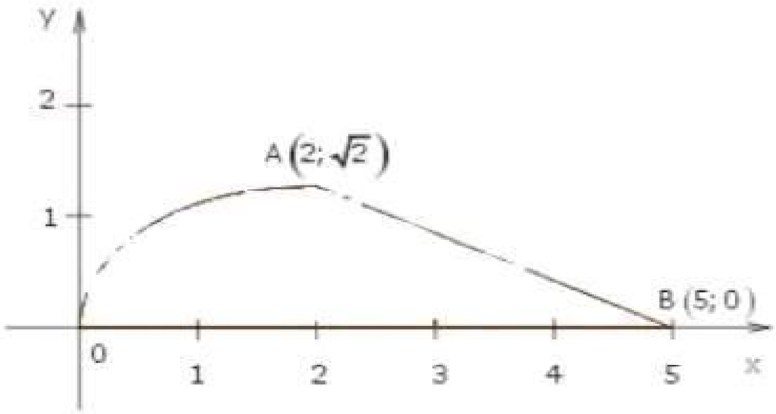
Exercice 4

On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 t^n e^{2t}\,dt$, où n est un entier naturel non nul.

1) En utilisant une intégration par parties, calculer I_1.
2) En utilisant une intégration par parties, trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
3) En déduire I_2 et I_3 .
4) Utiliser les résultats précédents pour calculer l'intégrale : $I = \int_0^1 (t^3+3t^2+2t)e^{2t}\,dt$.

Exercice 5

Dans un repère orthonormal , (unité graphique :1 cm), on considère la courbe composée de l'arc (OA) d'équation : $y=\sqrt{x}$, pour $x \in [0\,;2]$, et du segment [AB], où A(2 ; $\sqrt{2}$) et B(5; 0).



Calculer la valeur exacte (en cm^3) du volume V du solide (S) engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses du domaine plan coloré.
Donner une valeur approchée de V en cm^3(à un mm^3 près).

Exercice 6

Dans cet exercice, n est un entier naturel non nul.

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n=\int_0^2 (\frac{2t+3}{t+2})e^{\frac{t}{n}}dt$.

1)a)Soit φ la fonction définie sur [0 ;2] par : $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$. Etudier les variations de φ sur [0 ;2]. En déduire que, pour tout réel t de [0 ;2], $\frac{3}{2}\leq \varphi(t)\leq\frac{7}{4}$.

b)Montrer que, pour tout réel t de [0 ;2], on a : $\frac{3}{2}e^{\frac{t}{n}}\leq \varphi(t)\,e^{\frac{t}{n}} \leq\frac{7}{4}\,e^{\frac{t}{n}}$.

c)Par intégration, en déduire que : $\frac{3}{2}n\,(e^{\frac{2}{n}}-1)\leq U_n \leq \frac{7}{4}n\,(e^{\frac{2}{n}}-1)$.

d)On rappelle que : $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{e^h-1}{h}\right)=1$. Montrer que, si (U_n) possède une limite L, alors, $3\leq L\leq\frac{7}{2}$.

2)a)Vérifier que, pour tout dans I, on a : $\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$.

En déduire l'intégrale $I = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2}dt$.

b)Montrer que, pour tout t dans [0 ;2], on a : $1\leq e^{\frac{t}{n}} \leq e^{\frac{2}{n}}$. En déduire que : $I \leq U_n \leq e^{\frac{2}{n}}\times I$.
c)Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite L

Exercice 7

L'objectif est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 0$ par :

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x \text{ et, pour } n \geq 1,\ u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

1. *a)* Soit f la fonction numérique définie sur $[\,0\,;\,1\,]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Calculer la dérivée f' de f. En déduire u_0.

b) Calculer u_1.

2. *a)* Prouver que la suite (u_n) est décroissante (on ne cherchera pas à calculer u_n).

En déduire que la suite (u_n) est convergente.

b) Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$, on a :

$$1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}.$$

En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$(1) \qquad \frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

Déterminer la limite de (u_n).

3. Pour tout entier $n \geq 3$, on pose : $\mathrm{I}_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Vérifier que, pour tout entier $n \geq 3$, on a : $u_n + u_{n-2} = \mathrm{I}_n$.

Par une intégration par parties portant sur I_n, montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$nu_n + (n-1)\,u_{n-2} = \sqrt{2}.$$

b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 3$, on a :

$$(2) \qquad (2n-1)u_n \leq \sqrt{2}.$$

c) À l'aide des inégalités (1) et (2), montrer que la suite (nu_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 1

$I=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx \qquad J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx$

1) $I+J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x+\sin x}{\cos x+\sin x}dx$ d'après la propriété de linéarité

$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}1\cdot dx=[x]_0^{\frac{\pi}{3}}$ d'où $\boxed{I+J=\frac{\pi}{3}}$

$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{u'(x)}{u(x)}dx$

En posant $u(x)=\cos x+\sin x$ on a $u'(x)=\cos x-\sin x$

donc $\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\frac{u'(x)}{u(x)}$ d'où $I-J=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{u'(x)}{u(x)}dx=[\ln(u(x))]_0^{\frac{\pi}{3}}=\left[\ln(\cos x+\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

soit $I-J=\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\ln 1\Leftrightarrow \boxed{I-J=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$.

2) On a le système formé des deux équations: $I+J=\frac{\pi}{3}$ (1) et $I-J=\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$ (2)

$(1)+(2)\Rightarrow \boxed{I=\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\times\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$, $(1)-(2)\Rightarrow \boxed{J=\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\times\ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)}$.

Exercice 2

1) $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $\mathrm{J}=\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $\mathrm{K}=\int_0^1\sqrt{x^2+2}dx$. $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+2})$

a) Posons $g(x)=\sqrt{x^2+2}$, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et :

$g'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}$ soit $\boxed{g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}$.

b) $f(x)=\ln(u(x))$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables et : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

avec $u(x)=x+\sqrt{x^2+2}=x+g(x)\Leftrightarrow u'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\Leftrightarrow u'(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}$

Donc on a: $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+2}}\times\frac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+2}}\Leftrightarrow \boxed{f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}}$.

c) $\mathrm{I}=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx=\int_0^1 f'(x)dx=[f(x)]_0^1=f(1)-f(0)$

soit $I=\ln(1+\sqrt{3})-\ln\sqrt{2}\Leftrightarrow \boxed{I=\ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

2) $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$; $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$

a) $J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx + 2\times\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}} = \int_0^1 \frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx \left(car\ \frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a} \right)$.

Donc on a bien : $\boxed{J + 2I = K}$

b) $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = \int_0^1 1\times\sqrt{x^2+2}\,dx$

En utilise une intégration par parties: on pose $u'(x) = 1 \quad v(x) = \sqrt{x^2+2}$

$u(x) = x \quad v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

$K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u\times v'dx \Leftrightarrow K = \left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx$

$K = \left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 x\times\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}dx = \left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx = \left[x\times\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - J.$

Finalement on a : $\boxed{K = 3 - J}$.

c) En utilisant les deux relations: $J + 2I = K\ (1)$ et $K = 3 - J\ (2)$

On reporte l'quation (2) dans (1) on obtient: $J + 2I = 3 - J \Leftrightarrow 2J = 3 - 2I \Leftrightarrow \boxed{J = \frac{3}{2} - I}$.

Soit d'après la question 1) $\boxed{J = \frac{3}{2} - \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

La relation (2) donne $K = 3 - J$ soit $K = 3 - \frac{3}{2} + \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{K = \frac{3}{2} + \ln\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$.

Exercice 3

On considère l'intégrale : $I_n = \int_0^1 t^n e^{2t}dt$, où n est un entier naturel non nul.

1) $I_1 = \int_0^1 te^{2t}dt$ on pose : $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{2t}$, d'où : $u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{1}{2}e^{2t}$

Donc $I_1 = \left[t\times\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 1\times\frac{1}{2}e^{2t}dt \Leftrightarrow I_1 = \left[\frac{t}{2}\times e^{2t}\right]_0^1 - \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{e^2+1}{4}}$.

2) $I_n = \int_0^1 t^n e^{2t}dt$, on pose : $u'(t) = t^n$ et $v(t) = e^{2t}$, d'où : $u(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1}$ et $v'(t) = 2e^{2t}$

$I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\times e^{2t}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\times 2e^{2t}dt \Leftrightarrow I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\times e^{2t}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\int_0^1 t^{n+1}e^{2t}dt$

$\Leftrightarrow I_n = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\times e^{2t}\right]_0^1 - \frac{2}{n+1}\times I_{n+1} \Leftrightarrow I_n = \frac{e^2}{n+1} - \frac{2}{n+1}\times I_{n+1} \Leftrightarrow \boxed{2I_{n+1} = e^2 - (n+1)I_n}$.

3) on prend $n=1$, $2I_2 = e^2 - 2I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{e^2-1}{4}}$.

si $n=2$, alors: $2I_3 = e^2 - 3I_2 \Leftrightarrow I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}I_2 \Leftrightarrow I_3 = \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}\frac{e^2-1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_3 = \frac{e^2+3}{8}}$.

4) I = (t3 + 3t2 + 2t)e2t dt .

$I = \int_0^1 \left(t^3 + 3t^2 + 2t\right)e^{2t}dt = \int_0^1 t^3 e^{2t}dt + \int_0^1 3t^2 e^{2t}dt + 2\int_0^1 te^{2t}dt$ En utilisant la linéarité de l'intégrale.

$\boxed{I = I_3 + 3I_2 + 2I_1}$

$I = \frac{e^2+3}{8} + 3\frac{e^2-1}{4} + 2\frac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow I = \frac{e^2+6e^2+4e^2+3-6+4}{8} \Leftrightarrow \boxed{I = \frac{11e^2+1}{8}}$

Exercice 4

On pose $I_0 = \int_1^e x dx$ et $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$ pour tout n entier non nul.

1) $I_0 = \int_1^e x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e = \frac{e^2-1}{2}$.

$I_1 = \int_1^e x(\ln x)dx$, On utilise une intégration par parties:

On pose : $u'(x) = x$ *et* $v(x) = \ln x$, d'où $u(x) = \frac{x^2}{2}$ *et* $v'(x) = \frac{1}{x}$

$$I_1 = \int_1^e x(\ln x)dx = [u\times v]_1^e - \int_1^e u\times v' dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx$$

Soit, $I_1 = \left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^e \Leftrightarrow I_1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{e^2+1}{4}}$

2) $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1} dx$

En effectuant une intégration par parties sur I_{n+1} :

On pose : $u'(x) = x$ *et* $v(x) = (\ln x)^{n+1}$, d'où $u(x) = \frac{x^2}{2}$ *et* $v'(x) = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n$

$$I_{n+1} = \int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx = [u\times v]_1^e - \int_1^e u\times v' dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \left[\frac{x^2}{2}\times(\ln x)^{n+1}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\times(n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n dx$$

$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}\int_1^e x(\ln x)^n dx \Leftrightarrow I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2}I_n$,ainsi on a $\boxed{2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2}$

Pour $n=1$ on a : $2I_2 + 2I_1 = e^2 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - I_1 \Leftrightarrow I_2 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2+1}{4} \Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{e^2-1}{4}}$.

Ali Douma

donc $\forall x \in \left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$;

$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2x+1} - \frac{3}{2\sqrt{2x+1}}$$

2°)

f	F
$u'\sqrt{u}$	$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$

$$f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{\underbrace{2x+1}_{u}} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{\sqrt{\underbrace{2x+1}_{u}}}$$

$$= \frac{1}{4}u'(x)\sqrt{u(x)} - \frac{3}{4} \times \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}u(x)\sqrt{u(x)} - \frac{3}{4} \times 2\sqrt{u(x)}$$

$$\boxed{F(x) = \frac{1}{6}(2x+1)\sqrt{2x+1} - \frac{3}{2}\sqrt{2x+1} + C}$$

3) $I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x)^{n+1}dx-\int_1^e x(\ln x)^n dx$ en utilisant la linéarité de l'intégrale, on a

$I_{n+1}-I_n=\int_1^e\left(x(\ln x)^{n+1}-x(\ln x)^n\right)dx$ en factorisant par $x(\ln x)^n$, on a

$I_{n+1}-I_n=\int_1^e x(\ln x)^n\left(\ln x-1\right)dx$

Pour tout x de l'intervalle $[1;e]$, $x(\ln x)^n\geq 0$ et $\ln x-1\leq 0$

Donc : $x(\ln x)^n\left(\ln x-1\right)\leq 0$, la positivité de l'intégrale *permet* d'écrire: $\int_1^e x(\ln x)^n\left(\ln x-1\right)dx\leq 0$

D'où, $I_{n+1}-I_n\leq 0\Leftrightarrow \boxed{I_{n+1}\leq I_n}$, on en conclut que la suite (I_n) est décroissante.

Montrons que : $\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}$.

La relation du 2° peut s'écrire : $2I_{n+1}+(n+1)I_n=e^2\Leftrightarrow I_{n+1}=\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n$

Comme $I_{n+1}\leq I_n$, alors $\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n\leq I_n$ en remplaçant I_{n+1} par sa valeur.

$\dfrac{e^2}{2}-\dfrac{n+1}{2}I_n\leq I_n\Leftrightarrow\dfrac{e^2}{2}\leq I_n+\dfrac{n+1}{2}I_n\Leftrightarrow\dfrac{e^2}{2}\leq\left(1+\dfrac{n+1}{2}\right)I_n\Leftrightarrow\dfrac{e^2}{2}\leq\dfrac{n+3}{2}I_n$ soit $\boxed{\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n}$.

Pour montrer le deuxième membre de l'inégalité, on utilise le même raisonnement au rang n :
on a $I_{n+1}\leq I_n\Leftrightarrow I_n\leq I_{n-1}$

La relation du 2° peut s'écrire au rang n : $2I_n+nI_{n-1}=e^2\Leftrightarrow I_{n-1}=\dfrac{e^2}{n}-\dfrac{2}{n}I_n$

$I_n\leq I_{n-1}\Leftrightarrow I_n\leq\dfrac{e^2}{n}-\dfrac{2}{n}I_n$, en remplaçant I_{n-1} par sa valeur

$I_n\leq\dfrac{e^2}{n}-\dfrac{2}{n}I_n\Leftrightarrow I_n\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\leq\dfrac{e^2}{n}$, d'oùaprès simplification: $\boxed{I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}}$

En groupant les deux inégalités on obtient: $\boxed{\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}}$

4) $\lim\dfrac{e^2}{n+3}=\lim\dfrac{e^2}{n+2}=0$, d'après le théorème des gendarmes, on a: $\boxed{\lim I_n=0}$.

La suite (I_n) converge vers 0.

$\dfrac{e^2}{n+3}\leq I_n\leq\dfrac{e^2}{n+2}\Leftrightarrow\dfrac{n\times e^2}{n+3}\leq n\times I_n\leq\dfrac{n\times e^2}{n+2}$

$\lim\dfrac{n\times e^2}{n+3}=\lim\dfrac{n\times e^2}{n+2}=\lim\dfrac{n\times e^2}{n}=e^2$, d'après le théorème des gendarmes, on a: $\boxed{\lim nI_n=e^2}$

La suite (nI_n) converge vers e^2.

Exercice 7

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ et $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

1)a) On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par: $f(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

f est dérivable comme composée de fonctions dérivables et :

$$f'(x) = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}} \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}.$$

D'où, $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = [f(x)]_0^1 = f(1) - f(0)$. soit $\boxed{u_0 = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

b) $u_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{h'(x)}{2\sqrt{h(x)}}dx = \left[\sqrt{h(x)}\right]_0^1 = \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$ .soit $\boxed{u_1 = \sqrt{2}-1}$

2)a)Pour tout entier naturel $n \geq 1$: $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}dx \quad \text{d'après la linéarité des intégrales.}$$

Pour tout réel $x \in [0;1]$, $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0$ et $1-x \leq 0$, donc $\frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0$.

Par passage à l'intégral (positivité de l'intégrale ou conservation de l'ordre), on en déduit que:

$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

$\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geq 0 \Leftrightarrow u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \geq 0$. La suite (u_n) est minorée par 0.

(u_n) est minorée et décroissante, elle est donc convergente.

b) Pour tout réel $x \in [0;1]$, on a: $0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$.

En prenant l'inverse on a: $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \leq 1$, en multipliant par x^n qui est positif, on obtient:

$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \leq \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \leq x^n$, le passage à l'intégral donne: $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{2}}dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx \leq \int_0^1 x^n dx$

d'où: $\left[\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq u_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}}$ (1).

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet de conclure que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$

3)a) Pour tout entier naturel $n \geq 3$, on pose: $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

on a $u_n + u_{n-2} = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{x^{n-2}(x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}dx = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{x^2+1}dx$ (car $\frac{a}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$).

Donc on a bien $\boxed{u_n + u_{n-2} = I_n}$.

En utilisant une intégration par parties:

$I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx = \int_0^1 v'(x)\times w(x)dx$ en posant : $v'(x) = x^{n-2}$ $\quad v(x) = \frac{x^{n-1}}{n-1}$

$w(x) = \sqrt{1+x^2} \quad w'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

D'où: $I_n = [v(x)\times w(x)]_0^1 - \int_0^1 v(x)\times w'(x)dx$,

soit $I_n = \left[\sqrt{1+x^2}\times\frac{x^{n-1}}{n-1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n-1}\times\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$

$I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$ car: $\frac{x^{n-1}}{n-1}\times\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^n}{(n-1)\sqrt{1+x^2}}$

Donc finalement on a: $\boxed{I_n = \frac{\sqrt{2}}{n-1} - \frac{1}{n-1}u_n}$.

comme $u_n + u_{n-2} = I_n$, en remplaçant l'expression de I_n,

on obtient après simplification: $\boxed{nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}}$.

b) La suite (un) est décroissante, donc on a :

$u_n \leq u_{n-2} \Leftrightarrow (n-1)u_n \leq (n-1)u_{n-2}$ en multipliant par $(n-1)$

$\Leftrightarrow nu_n + (n-1)u_n \leq nu_n + (n-1)u_{n-2}$ en ajoutant nu_n

$\Leftrightarrow nu_n + (n-1)u_n \leq \sqrt{2}$ puisque $nu_n + (n-1)u_{n-2} = \sqrt{2}$

ainsi on a: $\boxed{(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}}$ (2)

c) La relation (2) donne $(2n-1)u_n \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$ $\quad 2n-1>0$

d'où en utilisant la relation (1) $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$

on a l'encadrement: $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2n-1}$ et en multipliant par n, $\boxed{\frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} \leq nu_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{n\sqrt{2}}{2n-1}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt{2}(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{n\sqrt{2}}{2n-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (en utilisant la limite du quotient de deux polynôm

Le théorème des gendarmes permet de conclure que: $\boxed{\lim_{n\to+\infty} nu_n = \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

La suite (nu_n) converge vers $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Exercice N°4 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \,/\, x(1-x) > 0\}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$x(1-x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

donc $D_f =]0,1[$

- $x \longmapsto x(1-x)$ est continue et ne s'annule pas sur $]0,1[$
- $x \longmapsto \frac{1}{x(1-x)}$ est continue et strictement positive sur $]0,1[$

donc $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$ est continue sur $]0,1[$

donc f est continue sur $]0,1[$

donc f admet une primitive sur $]0,1[$

2) Soit F la primitive de f sur $]0,1[$

tel que $F(\frac{3}{4})=0$

$g : x \longmapsto F(\cos^2 x)$; $x \in]0,\frac{\pi}{2}[$

a) montrons que g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

Rappel : f une fonction définie sur I

g une fonction définie sur J

Si : • g est dérivable sur J

• $\forall x \in J$; $g(x) \in I$ $(g(J) \subset I)$

• f est dérivable sur I

alors : $f \circ g$ est dérivable sur J